好玩的数学

张景中 主编

陈仁政 著

不可思议的e

对数是怎样发明的？对数为什么可以延长科学家的寿命？以e为底的对数为什么叫自然对数？为什么数学家们要用e作对数的底？e究竟是一个什么样的数……

跟书走吧，现在就出发，穿过快乐的河流，就会到达那“不可思议”的e的“老家”！



科学出版社
www.sciencep.com

好玩的数学

张景中 主编

不可思议的e

陈仁政 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以生动活泼的形式，通俗地介绍了对数的发明和这一发明的重大意义，如何用它来解决实际问题，以及常用对数的诞生和应用。而更多的篇幅则留给了“主角”自然对数——它为什么和怎样在整个科学中大放异彩，为什么数学家们要用e作自然对数的底，e究竟是一个什么样的数……

本书图文并茂，将人文精神融入“好玩的数学”以至整个科学之中，妙趣横生的情节引人入胜，让读者充分感受数学之真、之美、之乐、之用，适合于中等及以上文化的人阅读。

“跟我走吧”，现在就出发，穿过快乐的河流，就会到达e那“不可思议”的“老家”！

图书在版编目（CIP）数据

不可思议的 e/陈仁政著 .—北京：科学出版社，2005

（好玩的数学/张景中主编）

ISBN 7-03-015201-8

Ⅰ.不… Ⅱ.陈… Ⅲ.常数-普及读物 Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 022163 号

丛书策划：李 敏

责任编辑：李 敏 / 责任校对：宋玲玲

责任印制：钱玉芬 / 整体设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年4月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2005年4月第一次印刷 印张:21 3/4

印数:1—6 000 字数:243 000

定价:27.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

张景中 | 中国科学院院士 计算机科学家、数学家

1936年生于河南汝南。1959年毕业于北京大学数学力学系。1979年任教于中国科学技术大学，后曾任中国科学院成都数理科学研究室主任，成都计算机应用研究所副所长、名誉所长、博士生导师，四川师范大学计算机学院院长，广州大学教育软件研究所所长，中国数学会理事，中国计算机学会理事，中国科普作家协会理事长等。

张景中教授多年从事教学和研究工作，在自己的专业研究领域获得过中国科学院自然科学一等奖等多项奖项。他在教学研究工作之余热心科普事业。曾被评为建国以来贡献突出的科普作家。著有多种优秀科普作品，其中《教育数学丛书》获1995年中国图书奖；《数学家的眼光》等书（一套3册）获2003年第六届国家图书奖、五个一工程奖和全国科普创作一等奖。他还从事智能教育软件的研究，并提出智能教育平台的概念和结构设计，所主持开发的软件《Z+Z智能教育平台》获2000年香港国际发明博览会金奖。

陈仁政 | 中学高级教师

1943年生于重庆，曾从事多科中学教学。在《数学通报》《中小学数学》《数学教学通讯》《物理通报》《物理教学》《中学物理教学参考》《物理教师》《中学物理》《中学物理教学》《物理实验与仪器》《物理教学探讨》《化学教学》《知识就是力量》《世界发明》《百科知识》《科学世界》《光明日报》《中国电子报》等40多种报刊上，发表过文章130多篇。出版过《站在巨人肩上》（丛书一套9册）等10多部专著；其中《站在巨人肩上》获2003年北方十五省市图书评奖的一等奖。曾在1979年主持发明中国第一块磁性教学板，发现电学中的“并阻定理”（载《物理教学》1995年第7期）等。

总　　序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传”，不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一

些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说："道生一，一生二，二生三，三生万物。"古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力："庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。"

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是"好玩的数学"题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i，就是虚数单位，它的平方等于 −1。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π》和《不可思议的 e》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳25年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自2002年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少1024－4＝1020个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有x个，借给它们4个，成为$x+4$个。

5个猴子分别拿了a，b，c，d，e个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4\ (x+4)/25$$
$$c=16\ (x+4)/125$$
$$d=64\ (x+4)/625$$
$$e=256\ (x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x+4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4)=3125k\ (k\ \text{取自然数})$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《π 和 e》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi=3.1415926535897\cdots$，可得 $|355/113-\pi|<0.00000026677$，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，一定会有

$$|355/113-q/p|<2\times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p-113q|/113p<2\times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 355/113，所以 $|355p-113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p<2\times 0.00000026677$$

由此推出

$$p>1/(113\times 2\times 0.00000026677)>16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

2004年9月9日

前　言

真理只是一颗纯洁的明珠，它虽然晶莹透亮，却仿佛比不上那些五颜六色的玻璃片。

——弗朗西斯·培根

1615年夏天，一辆马车在炎热的大地上向北日夜兼程——从英格兰的伦敦到苏格兰的爱丁堡。

由于意外事故，马车在路上耽误了时间。

一位焦急等待的贵族终于失望了：“咳！他不会来了。”

就在他失望之际，有人敲门了……

素不相识的两个人紧握双手、热烈拥抱、泪流满面，在沉默中凝视了一刻钟之久……

他们是谁？为何事“相知无远近”，浓情胜美酒，竟忘了“今夕是何年”？

1614年，梅尔契斯顿堡的贵族纳皮尔发明了对数，出版了《论对数的奇妙性》一书，成为当时轰动英伦三岛的新闻。伦敦格雷沙姆学院几何学教授布里格斯闻讯后，立即写信和他联系……

于是就有了上面的“隔行扫描”。

本书第一～三章，分别介绍对数的诞生、应用和趣事。第四章，谈论常用对数和自然对数的缘起，和

它们为什么会成为“科学明星”。第五～九章，重墨描绘自然对数在数学及其他学科中形形色色的应用，它的“本来面目”，五花八门的奇闻趣事，以及等待我们揭开的谜团雾障。最后的第十章，备有e的几种数表供你查询。不过有关e的知识是“说不尽”的，而我们相信，e一定也是“好玩”的。

对数的发明，“使天文学家的寿命延长了一倍”。接着，无处不在的常用对数和自然对数大放异彩……

在《西厢记》中，中国元代戏曲作家王实甫这样描述黄河的作用：“滋洛阳千种花，润梁园万倾田，也曾泛浮槎到日月边。”对数，就是数学以至整个科学的“黄河”，它已经和将继续承载科学这只“浮槎”到浩瀚真理的“日月边”……

对数和相关发明，为数学和整个科学那万紫千红的百花园又增添了一朵朵绚丽的奇葩。今天，我们正在这花园中尽情地享受着阳光的温暖，但千万不能忘记科学先贤们经过坚忍不拔的努力建立的伟大功绩，千万不要“污染”他们挖掘的至今不息的汩汩泉流……

读完这本书，科学先贤们朝圣科学“麦加”那艰难而欢快的脚步声，数学以至整个科学那起伏跌荡而振聋发聩的潮声，一定会时时在我们耳边回响，永远激励着我们“在崎岖的小路上”向科学的高峰攀登……

国内某著名杂志的一位编辑在一封信中写道：“一流的科普佳作不但应科学性、通俗性、趣味性并举，还应传递出科学精神，即不但写出科学之趣之美，还应写出科学家的人性之美……”这和德国数学家

汉门·韦尔（Hermann Weil, 1885～1955）的“我的工作常想把真和美统一起来……”的说法相通。

汉门·韦尔接下去说：“但不得不在这两者之间选择时，我经常选择美。”而我们还要接下去说，当不得不在美和乐之间选择时，我们必定选择乐——“欢乐是人生的别名”嘛！

欢乐是人生的最高追求。科学家们之所以终生“苦苦”追求真善美——不惜宵衣旰食，甚至通宵达旦，……在于他们视这种追求为快乐，而且乐此不疲。当得到“1＋2”的陈景润（1933～1996）住在 $3m^2$ 的厕所里追求“1＋1”的时候，他一定是快乐的。

单纯罗列丰富的科学知识、机械堆积翔实的科学史料、就科学写科学的作品，难以吸引“眼球”和有长久的生命力。只有那些熔科学知识、科学方法、科学精神等和人文精神于一炉，能培养人的全面素质——特别是健康的心理，让人赏心悦目、给人真正快乐的作品，才能“叫好又叫座”。只有具备生动故事情节和蕴涵深刻哲理的巨著才会穿破时空，广久流传。因为人们可以漠视一个观点，但却不会拒绝一个故事——特别是给人以快乐的故事。

要完成一个科普佳作，似乎唾手可得，实则决非易事，因此，如何创作出使青少年觉得快乐的、爱不释手的科普佳作（和教科书）——“胜过”他们迷恋的“网吧”那些“黄赌毒黑”，是国内作者（和教育工作者）永远探讨的课题和任重道远的任务，也是让青少年走出“网吧”的“治本”之道。

在这方面，苏联人别莱利曼（Яков Исидорович Перельман，1882～1942）、美籍乌克兰人盖莫夫（George Gamow，1904～1968）、美国人马丁·加德纳（Martin Gardner，1914～）、美籍苏联人阿西莫夫（Isaac Asimov，1920～1992）等世界顶级科普作家和中国的一些优秀科普作家，为我们树立了很好的榜样。

本书作者借“他山之石”，冒昧抛出这块“砖”，以就教于广大读者朋友的时候，就是企图引出读者和上述科普作家的“玉”。所以，敬请“公婆”们——广大读者和大方之家，不吝对这个“丑媳妇”指指点点、评头论足。

陈仁政
2005.02.15

目　录

总序

前言

第一章 激情相约爱丁堡——对数使科学家延寿…………1

1.1 从第一级到第三级——数学运算“步步高”…………1

1.2 “在离天很近的地方”——斯蒂菲尔的遗憾…………5

1.3 教授与贵族——激情相约爱丁堡…………8

1.4 汗水加智慧——纳皮尔发明对数…………12

1.5 科学更有力量——天才的遗憾…………17

1.6 承伟业自有来人——从布里格斯到弗拉格…………21

1.7 伟大发明生“龙胎”——红极一时的“尺子”…………24

1.8 伟大发明生“凤胎”——红极一时的“表格”…………28

1.9 并非“风景这边独好”——“杀鸡杀喉”比尔吉…………35

1.10 天文学家延寿一倍——拉普拉斯如是说…………38

1.11 “迟到的爱”——对数在中国…………40

第二章 无处不在的对数——“天地英雄”大显神通…………43

2.1 “吹拉弹唱”也要讲数学——音乐中的对数…………43

2.2 谁也无法“逃遁”——噪声和对数…………46

2.3 规律缘起古希腊——星星亮度和对数…………48

2.4 科学家笔下的曲线——实用的对数图…………50

第三章 奇趣就在对数中——从 2 > 3 到 3 个 2…………53

3.1 为什么 2 > 3——从欧拉时代的“自摆乌龙”谈起…………53

3.2 对数的奇迹——你也能当速算大师…………55

3.3 雕刻家也会糊涂——弄错了的对数螺线…………59

3.4 狄拉克也会疏忽——3 个 2 的奇趣…………62

3.5 高考题中的对数方程——“盈不足术”也可解…………64

第四章 对数的两大宠儿——既要“常用”也要“自然”…………67

4.1 以 2 为底的对数——神通广大应用广泛…………67

4.2 常用对数——“爱你没商量”…………72

4.3 自然对数——不只是大自然的选择…………76

4.4 e 的又一用武之地——编造对数表…………80

4.5 赫德、麦卡托、泰勒……显神通——如何编造对数表…………86

第五章 “王宫”中的漫游——数学殿堂中的 e…………89

5.1 关系你的“钱包”——无处不在复利律…………89

5.2 你不会自成“大款”——$(1+\frac{1}{n})^n$到 e 为止…………92

5.3 数学珍宝——π 和 e 的“一家亲”…………101

5.4 弟弟帮哥哥——e 为 π 开路立功…………106

5.5 它们是虚数吗——e 和 i 及 π“桃园三结义”…………109

5.6 悄悄走近“数学王子”——素数定理中的 e…………109

好玩的数学

5.7 从科克到维诺格拉多夫——对数积分和指数积分中
的 e…………119
5.8 从麦齐里阿克到陈景润——华林-哥德巴赫猜想中的 e…………121
5.9 “吉利斯猜想”——梅森素数个数中的 e…………126
5.10 半个世纪的积分探索——欧拉积分与 e…………133
5.11 蠕虫能“如愿以偿”吗——欧拉常数中的 e…………134
5.12 这样近似算阶乘——e 与斯特林逼近…………141
5.13 自然数“切蛋糕”——“整数分拆”也要靠 e…………143
5.14 对数正态分布——概率计算中的 e…………147
5.15 “双曲”与“三角”——这里也有 e…………153
5.16 英国海疆长几何——分形公式中的 e…………157
5.17 积分方程的滥觞——拉普拉斯变换和 e“结盟”…………161
5.18 级数何名傅里叶——三角级数中“暗藏”的 e…………166
5.19 从达·芬奇到伯努利——“悬在空中”的 e…………169
5.20 从维诺格拉多夫到陈景润——“高斯余项”中的 e…………172
5.21 聚首“中心”的“难题”——4 只甲虫如何爬行…………173
5.22 数学也要“轻装上阵”——e 与微积分…………175
5.23 “基本”和“重要”——e 在微积分中闪光…………177
5.24 众“神”朝拜“美猴王”——离不开 e 的数学…………178
第六章 e 和万物如此钟情——走出“王宫”的自然对数…………182
6.1 你也可当“大力士”——缆绳靠 e 系船舟…………182

6.2 赝品名画原形毕露——“衰变”用 e 揭奥秘…………189
6.3 牛顿小试牛刀做“小菜”——冷却定律中的 e…………193
6.4 电、光世界的宠儿——e 和你时时相伴…………197
6.5 “滴答”声中的物理公式——摆锤振动中的 e…………199
6.6 火箭飞天的奥秘——人类借 e 上“青云”………… 200
6.7 降落伞为什么匀速落地——落体速度与 e…………205
6.8 煮不熟的米饭——气压随高度变化公式中的 e…………209
6.9 从麦克斯韦到玻耳兹曼——刻在墓碑上的 e…………211
6.10 速度和焓变——化学反应也离不开 e…………214
6.11 植物学“联姻”物理学——布朗运动中的 e…………216
6.12 阿氏常数这样测——“微粒公式”借 e 建功…………217
6.13 生存竞争——弱肉强食方程中的 e…………220
6.14 如何预测鼠疫病人数——疾病研究中的 e…………223
6.15 从人类到细菌——生物增殖中的 e…………226
6.16 何时添加樟脑球——衣物防蛀中的 e…………231
6.17 “家务事”中的数学——洗衣服时也有 e…………232
6.18 科学和 e——难舍难分的“情人”…………235
第七章 掀起你的盖头来——e 的“质”“量”大白天下…………237
7.1 数系发展——从自然数到超越数…………237
7.2 e 的性质——从无理数到非二次代数数…………241
7.3 e 的性质——从无理数到超越数…………250

◎第一章
激情相约爱丁堡
——对数使科学家延寿

在能够对科学做出贡献的所有因素中，观念的冲破是最伟大的。

——汤姆逊

“混沌初分盘古先，太极两仪四象悬……”

可能人类茹毛饮血的年代就有了数学，那我们就从数学运算谈起。

1.1 从第一级到第三级——数学运算“步步高”

山洞口坐着一个盲目的老人，他的眼睛是被俄底修斯刺瞎的。

这个不幸的老人，就是独眼巨人波吕斐摩斯。他每天只有一件事：照料他的羊群。

早晨，母羊外出吃草，每出去 1 只，他就从石子堆中捡起 1 颗石子。

傍晚，母羊归来，他就扔下 1 颗石子。当他把早晨捡起的石子全部扔光的时候，他就知道全部母羊已经返洞归家。显然，他用的是“一一对应”的记数方法。

这是约公元前八九世纪古希腊诗人荷马（Homeros），写在《荷马史诗》中的故事。俄底修斯（Odysseus）和波吕斐摩斯（Polyphemus）都是希腊神话中的人物。

但是，用一一对应记数法，既不能解决有多少只羊的问题，也不能解决一群羊增加或减少几只之后有多少只羊的问题。于是自然数记数的方法应运而生——它解决了前一个问题。数的加法和减法也发明出来了——它解决了后一个问题。

当然，我们知道，加法和减法不但有数的加法和减法，而且包括集合的加法和减法。

人类最古老的文字中就有用符号表示的第一级运算——加法和减法。例如，古埃及艾哈迈斯纸草书中就有了加法和减法的符号。艾哈迈斯（Ahmes）是大约公元前 20 世纪的埃及祭司和数学家，他的加号“ʎ”是向右走的两只腿，他的减号“ʎ”是向左走的两只腿。后来，经过各国许多数学家的努力，才有今天的加号“+”和减号“-”。

今天的加号“+”和减号“-”，最早是 15 世纪的最后 20 年由德国人首先使用的。在德国德累斯顿（Dresden）城图书馆，保存着 1486 年的手稿卷 C·80，其中就有这两个符号。而最早在印刷的书中使用它们的，是出生在捷克的德国数学家维德曼（J.Wvidmann（或 Wvidman），1462～1498），使用时间是 1489 年。

顺便指出，在 1690 年，大名鼎鼎的德国数学家莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）还发明了一个“概

念加号”——“⊕”，它和“概念减号”——“⊖”或“－”表示逻辑概念演算和逆运算。在内涵方面，$A \oplus B$ 表示既 A 且 B 的那个性质；在外延方面，$A \oplus B$ 表示属于 A 或属于 B 的那个类。

但是，在遇到“连加”或“连减”的时候，加法或减法的效率就低了。于是第二级运算——乘法和除法，以及乘号和除号又应运而生了。

在西方，“×”被称为和数学毫无关系的“圣安德鲁斜十字”（St. Andrew's cross）。安德鲁是耶稣的12门徒之一，由于他被钉在斜十字架上处死，所以斜十字被称为圣安德鲁斜十字。1631年，英国数学家奥特雷德（William Oughtred，约1574～1660），首先在他的《数学之钥》一书中使用了现代意义上的“×”。

用小圆点“·”表示乘号是为了避免乘号“×”和字母“X”混淆，它的发明者是莱布尼茨。他在1698年7月29日给瑞士数学家雅格布·伯努利（Jacob I.Bernoulli，1654～1705），或他的弟弟约翰·伯努利（John Bernoulli，1667～1748）的一封信中，首先使用“·”表示乘号。



图 1-1　莱布尼茨

不过，有时“·”和“×”的含义是不同的，例如，在向量代数中，$a \cdot b$ 表示 a 和 b 的“数量积”，即“点积”也就是“内积”；而 $a \times b$ 表示 a 和 b 的“向量积”，即“叉积”也就是“外积”。

现在，在中国用“×”或“·”都符合规定，通常在字母前或括号前可以略去。而欧洲大陆派（例如德国、法国、俄罗斯）规定用“·”表示乘号，其他国家则用“×”表示乘号。

今天用的除号“÷”称为“雷恩记号”。它是瑞士数学家J.H.雷恩在1659年出版的一本代数书中首先引用的，随着1668年这本书被译为英文，这个记号逐渐通用。

莱布尼茨也是另一种除号——“:”的发明者。他是在1666年的论文《组合的艺术》中，用“:”作除号的，这一除号至今仍在使用。莱布尼茨不但是微积分的发明者之一，而且也是一位数学符号大师，我们至今还在使用他发明的几乎所有的微积分符号。

第二级运算已经进步了，但是人们发现在“连乘”或“连除”的时候，还需要第三级运算，这就是乘方、开方和对数。

我们知道，乘方有开方和对数两种逆运算，而加法和乘法分别只有减法和除法各一种逆运算，这是第三级运算和第一、二级运算的不同之处。

现在所用的乘方中指数符号的滥觞，是英国的苏格兰人休姆（James Hume）。他于1636年居住在巴黎的时候，用小的罗马数字放在字母的右上角表示指数。1637年，法国数学家笛卡儿（René Descartes，1596～1650）完成了现代乘方中的指数符号——在字母或数字的右上角用小的阿拉伯数字表示指数。

但是，笛卡儿的指数只是正整数，而法国数学家奥雷姆（Nicole Oresme，约1323～1382）、荷兰数学家斯蒂文（Simon Stevin，1548～约1620）、英国数学家沃利斯（John Wallis，1616～1703）等，先后使用或提到过分数指数和负数指数。法国数学家丘凯（Nicolas Chuqet，约1445～1500）则最早使用

了负数指数和零指数，与现代的符号接近。而现行的分数指数符号和负数指数符号，则出自大名鼎鼎的英国科学家牛顿（Isaac Newton，1643～1727）之手。1676年6月13日，他给皇家学会秘书奥尔登伯格（Henry Oldenburg，1615～1677）转给莱布尼兹的信中，创设了这种指数。

虚数指数的发明者是一位最先使用虚数的业余数学家——意大利的法格纳诺（Giulio Carlo de' Toschi de' Count Fagnano，1682～1766）。他在1719年将π定义为$4\ln[(1-i)/(1+i)]^{i/2}$的时候，就用了虚数指数。

1679年，莱布尼兹在一封写给荷兰数学、物理学家惠更斯（Christiaan Huygens，1629～1695）的信里，在一个方程中引入了变指数。

在历经无数次变革之后，现代方根符号“$\sqrt{\ }$”由卢贝（De l a Loubère）在1732年首先使用$\sqrt[3]{25}$之后，才逐渐流行，并用于各次方根。

随着乘方运算的出现，指数函数也出现了。数学家们用“exp”或“Exp”表示指数函数，例如，有时用“$\exp x$”表示“e^x”这个指数函数。

可以想象，乘方的一种逆运算——开方的诞生，是“顺理成章”的，可是乘方的另一种逆运算——对数的出生，就有些“难产”了。

1.2 “在离天很近的地方”——斯蒂菲尔的遗憾

“1533年10月3日是世界末日！”16世纪初，一个人这样预言。

听了他的宣传，他的追随者毁掉或消耗掉所有的财物，惶惶不安地等待着这一天的来临。但是，“世界末日”并没有如期而至。由于这一蛊惑人心的言论和传播被视为异端邪说的新教，他被当局投入监狱。

这个趣闻轶事的主角——“他”，就是德国数学家斯蒂费尔（Mihael Stiffel，1486或1487～1567）。

斯蒂菲尔是德国厄斯林根地方的新教牧师，后来又在著名的哥尼斯堡大学里担任神学和数学的讲师。

作为数学讲师，斯蒂菲尔当然懂得一一对应的方法，于是在1544年，他写了一本名叫《整数的算术》（Arithmetica integra）的书。在这本书中，他就用这种方法几乎建造了一座数学丰碑。

斯蒂菲尔在书中欣喜地写道：“关于整数的这些奇妙性质，可以写成整本整本的书……”那么，斯蒂菲尔发现了整数的什么“奇妙性质”，使他这样惊喜万分呢？我们还是先来看看他在书中的表1-1里的两个数列吧。

表1-1

…	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	…
…	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

容易看出，表1-1的上一列，是一个通项公式为2^n（n为整数）的等比数列——他称为“原数”。下一列是一个整数构成的等差数列——他称为与原数对应的“代表人物”。这里说的代表人物，德文是Exponent（或exponent），也可翻译成“代表者”，而我们把它叫做“代言人”。

斯蒂菲尔发现，如果要计算 16·128 的话，可以用下面的一种巧妙方法。

先找到 16 的代言人 4，再找到 128 的代言人 7，然后把 4 和 7 相加，就得到了 16·128 的新代言人 11，最后找到 11 对应的新数 2048。这个 2048，就是 16·128 的答案。

真是美妙极了，计算乘法变成了计算比乘法更简单的加法！对此我们很容易理解，因为 $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ 。

美妙的感觉还没有完——用它们还可以做除法哩！

举例来说吧，算 2048/128 的时候，只要用它们各自的代言人 11 和 7 相减，就得到新代言人 4，再由 4 找到对应的新原数 16 就是答案。当然，我们知道，这是因为 $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ 。

一句话说完，利用这两个数列可以把较复杂的乘除法变成加减法。大致同时，法国数学家舒开也意识到这一点。

对于我们来说，斯蒂菲尔的这个结论已经没有什么神奇之处，因为一眼就能看出，斯蒂菲尔的代言人就是原数以 2 为底的对数。例如 $\log_2 64 = 6$，等等。

我们还可以看出，斯蒂菲尔实际上已经掌握了对数运算法则 $\log_2(MN) = \log_2 M + \log_2 N$，和 $\log_2\left(\frac{M}{N}\right) = \log_2 M - \log_2 N$。

遗憾的是，在斯蒂菲尔的时代还没有分数指数的概念；那么，不是数列中的数——例如 17·127 和 2049/257 这些题目又怎么办呢 ——它们没有代理人呀！

这一连串的问题，把斯蒂菲尔弄得焦头烂额，不知“云横秦岭家何在”。他只好说：“这个问题太狭窄了，所以不值得研究。”便“雪拥蓝关马不前”——把它搁到一边。

不过，斯蒂菲尔也不是全然无功，他用的代理人这个词，后来被数学界正式采用，就是现在我们说的“指数（函数）”Exp 或 exp，而且他还把这种对应关系推广到负、分指数的情形。

“在离天很近的地方，总有一双眼睛在守望”，这是歌曲《神奇的九寨》中的一句。可惜的是，斯蒂菲尔在离天那么近的地方，却没能望见那神奇的“天堂”，已经走到天堂边缘上的脚又缩了回去……而把机会留给比他更具慧眼的来者——纳皮尔。

不过，已经在天堂的斯蒂菲尔也不必懊悔，因为在他之前约 1800 年，比他更光辉夺目的巨星、古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287～前 212）虽然也注意到类似关系的表 1-2 中的两个数列，可是，他也不知道在高远的云端，还有对数那如花似玉般的容颜。

表 1-2

1	10	10^2	10^3	10^4	…
0	1	2	3	4	…

不过，阿基米德，特别是斯蒂菲尔的前驱性工作，成为我们下面要说的纳皮尔发明对数的“巨人肩膀”。

1.3 教授与贵族——激情相约爱丁堡

弹指一挥间，半个世纪过去了。阿基米德、斯蒂菲尔的前驱性工作在大约 1594 年开始绽花结果。经过多年的潜心研究，英国苏格兰的贵族、数学家约翰·纳皮尔（John Napier，1550～1617）

多少是站在这些的巨人的“肩膀”上发明了对数，也成了“巨人”。

在大约20年以后的1614年6月，居住在豪华庄园梅尔契斯顿堡的贵族纳皮尔，在爱丁堡出版了《奇妙的对数定律说明书》(Mirifici logarithmorum canonis descriptio)。

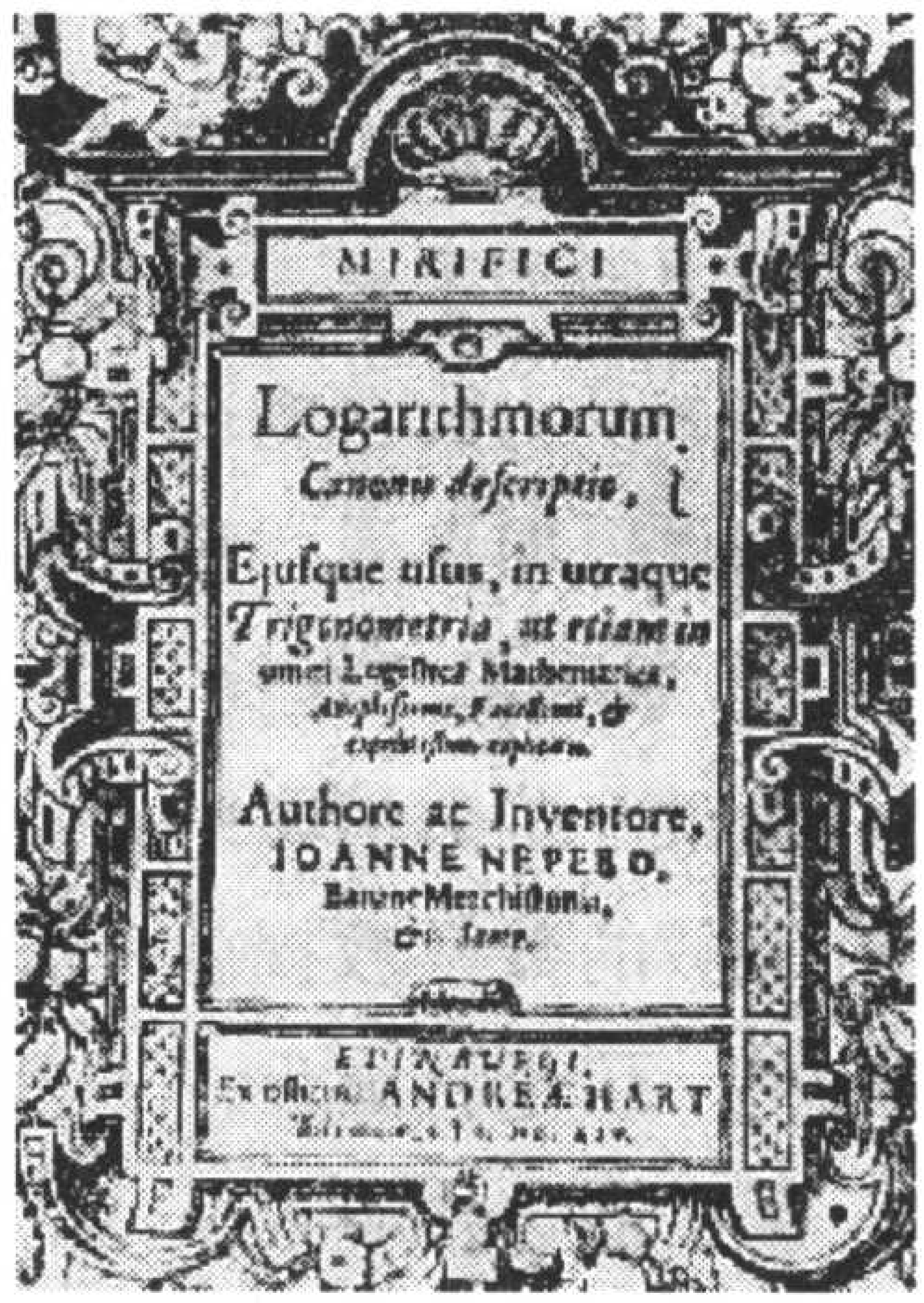


图 1-2 《奇妙的对数》封面

这本书是如此著名，以致许多科学文献都必须提到它，这样它就有了许多译名。例如，《关于奇妙的对数法则的说明》、《论对数的奇妙性》、《奇妙的对数》(图1-2)、《论述对数的奇迹》、《惊人的对数规则》。

这本有200余页的书，公布了纳皮尔发明的对数的一些详情，和他编制的间隔为1′的7位（一说8位）正弦对数表——世界上第一个三角函数的对数表，以及对数的性质、对数表的说明、使用规则和实例。

纳皮尔发明对数的消息很快就传开了，震惊了当时的伦敦数学界。这本书的第一个英译本由S. 赖特（Wright）在1616年出版，它的译者是此时已经谢世的S. 赖特的父亲爱德华·赖特（E. Wright）。

此外，在1619年，纳皮尔的遗作《奇妙的对数表的构造》(Mirifici logarithmorum canonis constructio)（又译《奇妙对数规则的结构》或《作出对数的奇迹》）出版，其中有他在生前

承诺的、介绍他是用什么方法构想对数的，以及编造对数表的方法的介绍。

一位伦敦的数学教授看到纳皮尔这一成果后，立即就意识到它的重大价值。他写道："纳皮尔用他新颖而巧妙的对数使我能够用脑和手来工作。我从未读过一本能够使我这样惊异和喜爱的书了。我希望今年夏天就能见到他，因为我从未读过一本能令我更加喜爱，更加惊异的书了。"真是难得的"慧眼识英雄"，慧眼识"好货"。

经过一些通信联系之后，第二年即 1615（一说 1616）年，这位伦敦的数学教授就不辞劳苦，乘坐马车——当时没有火车和汽车，从伦敦出发，专程到爱丁堡去会见这位他无比崇敬的、天才的苏格兰人。

在漫长而又崎岖的旅途上，数学教授在日记中写道，这个苏格兰人的前额一定很高，因为他头脑发达，否则是难以做出如此惊人的发明的。


图 1-3　相知无远近

真是好事多磨，由于意外的事故，教授在路上延误了时间。焦急等待的苏格兰贵族终于失望了，他向一位朋友抱怨说："咳！亨利教授不会来了吧?"可就在这时，有人敲门了，教授出现在他的面前。

"相知无远近"，这对"海内知己"相拥而抱，在沉默中相互凝视了达一刻钟之久（图 1-3）。后来，教授说道："阁

下，我经历了长途跋涉专程来看望你，就是想要知道究竟是怎样富有聪明才智的头脑，才使得你首先想出对于天文学的这一极好的帮助。阁下，你发现了它，现在看来是很容易的，但是我很奇怪，在此之前为什么没有人能够发现它呢?"

真是"酒逢知己千杯少"，这两位数学家已经"不知天上宫阙，今夕是何年"了——作为贵宾，这位教授在贵族的梅尔契斯顿城堡里滞留了一个月之久。

这位专程去访问纳皮尔的数学家，就是伦敦格雷沙姆学院的几何学教授亨利·布里格斯（Henry Briggs，1561～1631)。这里提到的格雷沙姆（Thomas Gresham，1518～1579)，全译托马斯·格雷沙姆，是英国皇家交易所的创始人，诺福克(Norfolk）世家的富商。1537年，他被选为伦敦市长，曾出资建立格雷沙姆学院。

这里有必要交代，怎么一会儿说爱丁堡，一会儿又说梅尔契斯顿堡。原来，梅尔契斯顿堡是苏格兰首府爱丁堡附近的一个小城堡，有的资料又译为马其顿堡、曼彻斯特或梅奇斯顿堡。说大方向爱丁堡是因为它知名，说梅尔契斯顿堡是因为它更准确具体。

纳皮尔就出生在梅尔契斯顿堡的一个贵族家庭。他在1563年进入圣·安德鲁斯（或写作圣安德鲁斯）大学的斯帕希杰尔学院（或圣萨尔瓦特学院）学习。1566年，他16岁还没毕业时，就在他的舅父、奥克尼的主教博瑟韦尔（A.Bothwell）的支持下，出国到欧洲游历求学，1571年回乡。

1572年，纳皮尔与斯特林（J.Stirling）爵士的女儿伊丽莎白(Elizabeth）结婚后，定居在加尔特内斯。1579年妻子去世后，纳皮尔又娶珀思州克罗姆利克斯的奇斯霍姆（A.Chisholm）为妻。

纳皮尔于 1580 年继承父亲产业，1608 年迁居梅尔契斯顿，当上了梅尔契斯顿堡的第八世领主，直到 1617 年 4 月 4 日辞世，再没有离开过此地。

不过，由于“他早年的生活很少为人所知”，所以我们对纳皮尔的经历的另一种不尽相同的说法难以甄别。这种说法是，他因为富裕的家庭环境而养成懒惰的习惯，在 1724 年 24 岁的时候，离开父亲到法国留学并在大学毕业后一直在法国工作，直到 1608 年父亲去世才回到家乡。他在当上梅尔契斯顿堡主人的同时，继续从事数学研究。

1.4 汗水加智慧——纳皮尔发明对数



图 1-4　纳皮尔

那么，纳皮尔（图 1-4）“究竟是怎样富有聪明才智”，才在“没有人能够发现它”的时候，发现“那人却在灯火阑珊处”的呢？

我们知道，对数作为一种计算方法，作用在于把较复杂的乘除运算化为较简单的加减运算。这种化简的原始思想，在以下 4 个三角函数公式中已经显露端倪：

$$2\sin A\ \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$
$$2\sin A\ \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A\ \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$
$$2\cos A\ \sin B = \sin(A+B) - \cos(A-B)$$

这 4 个公式有时称为沃纳公式，因为德国数学和天文学家约翰·沃纳(Johann Werner, 1648～1528)曾用它们简化天文计算。沃纳也是欧洲最早使用 $2\sin A\ \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 的人之一。他在 1514 年完成的、现已失传的手稿《论大圆弧构成的三角形》，对三角学的发展有重要意义。这 4 个公式在纳皮尔所处的时代已广为人知，他的思路很可能就是从这些公式出发的，否则很难解释为什么最初他仅用于研究角的正弦的对数。

更直接的“旁证”是，据说法国数学家韦达（Francois（或 François）Vièta（或 Viète），1540～1603）和德国数学家克拉维乌斯（Christophorus Clavius，1537～1612）发表了利用三角函数表简化计算的方法，而纳皮尔则从中受到启发，从而发现了对数。

那么，三角函数表是怎样具体使计算简化的呢？我们用一个实例来加以说明。

笔算 0.1736·0.9903 是很麻烦的，但是用下面的方法就简便多了。先用三角函数表查得 $0.1736 = \sin 10°$，$0.9903 = \cos 8°$，再由 $2\sin A\ \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$就知道

$$\begin{aligned} 0.1736 \cdot 0.9903 &= \sin 10° \cos 8° \\ &= [\sin(10° + 8°) + \sin(10° - 8°)]/2 \\ &= (\sin 18° + \sin 2°)/2 \\ &= (0.3090 + 0.0349)/2 \\ &= 0.17195 \end{aligned}$$

当然，这个近似计算的结果 0.17195 中只有 3 位有效数字

是可靠的，因此答案是 0.172。

由此可见，我们用三角函数表和三角公式 $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$，通过非常简单的计算，就得到了 $0.1736\cdot0.9903=0.17195$。

纳皮尔大约从 40 岁（1590 年）之前开始潜心研究对数，他最终给出对数的如下定义：

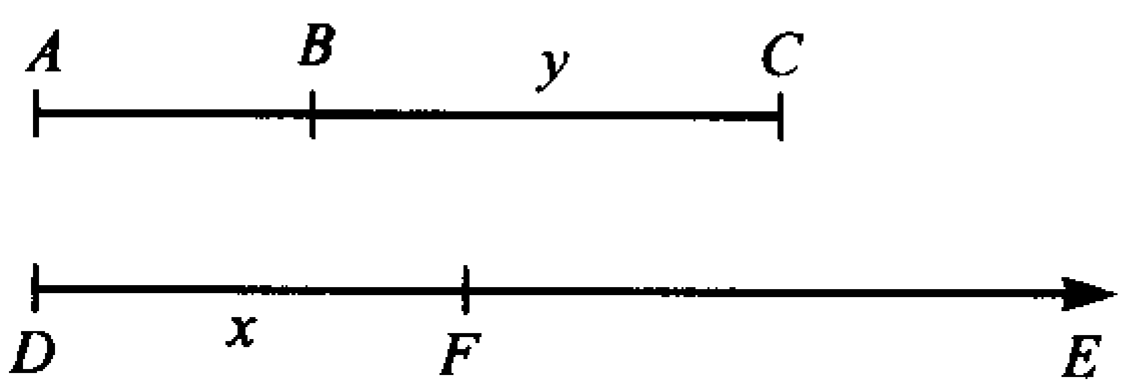


图 1-5

如图 1-5 所示的一条线段 AB 和一条射线 DE，设点 C 和点 F 以同样的初始速度分别从 A 和 D 出发，沿线段 AB 和射线 DE 运动。假设点 C 运动的速度在数值上总是等于 CB，而点 F 运动的速度始终是不变的。

显然，$CB=y$ 是一个无穷递减等比数列，而 $DF=x$ 则是一个无穷递增等差数列。这时，纳皮尔把 y 看成是斯蒂菲尔所说的“原数”，把 x 看成是“原数” y 的“代表人物”。

不过，纳皮尔没有这样叫，而是把 x 定义为 y 的对数，用数学式子表示为 $x=\text{Nap}\log y$。这里“Nap”是指“纳皮尔”，“Nap log y”是“纳皮尔对数”。

纳皮尔首创的“对数”（logarithm）这个词，他用没有简化的全文，由两个希腊文的词 λó ros（拉丁文 logos，意为“表示思想的文字或符号”，在这里的意思是“比率”或“计算”），和 ἀριθμós（意思是“数”）组合而成。而这里的含义则是“比的数”即“比数”（ratio number），意思是指数与数之间总保持相同的比。他最初把“比数”称为“人造数”（artificial number），后来才用“对数”。而德国数学家科珀（Karl

Friedrich August Koppe, 1803～1874）在 1852 年第 4 版的《平面几何》一书中，却用“取对数”这个动宾结构的词。

不过，虽然纳皮尔发明了对数，但却没有给出对数的定义。直到 1742 年，英国数学家、作家威廉·琼斯（William Jones, 1675～1749）才给出实数对数的定义：已知 a 是不等于 1 的正数，如果 a 的 b 次幂等于 N，那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数。这个定义写成数学式子就是 $b=\log_a N$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，$N>0$。这一年，琼斯在给他的同胞威廉·伽迪纳（William Jardiner）的《对数表》写的序言中，第一次使用了这个定义。

复数（或虚数）的对数的定义是，已知复数 $z\neq 0$，对于正数 e，有无限多个复数 W（它们的模相等，幅角相差 2π 的整数倍），如果 $e^W=z$ 成立，那么 W 叫做以 e 为底的复数 z 的对数，记作 $W=\ln z$。这个定义是瑞士数学家雅格布·伯努利（1654～1705）即詹姆士·伯努利（James Bernoulli）给出的。

1702 年，雅格布·伯努利在科学院的《纪要》上，发展了 $\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$，引入了部分分式的方法。在求积分 $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ 的时候，因为 ax^2+bx+c 的一次因式可能由复数构成，求部分分式就成了 $\int\frac{dx}{ex+f}$（其中 f 为复数），他仍然用对数的法则来积分，这样就出现了复数的对数。

上面的复数（或虚数）的对数的定义中，隐含了“每个复数有无限多个对数值”这一命题。这个命题是瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler, 1707～1783）最早提出来的。欧拉关于对数

的另一贡献是，他指出了“对数源于指数”之后，对数才大大方方走进学校的数学课堂。

纳皮尔对数既不是常用对数，也不是自然对数。不过纳皮尔对数和自然对数可以用 Nap $\log y = 10^7\ln(10^7/y)$ 来换算。一些人说纳皮尔对数是自然对数（以 e 为底），这是不正确的。可以看出，纳皮尔对数随着真数的增加而减小，这和自然对数随着真数的增加而增加的情形正好相反。

事实上，纳皮尔对数的底是 1/e。这一点，只要我们把 Nap $\log y = 10^7\ln(10^7/y)$ 改写成 Nap $\log y = 10^7\log_{1/e}(y/10^7)$ 就可以看到。

这里，读者会问，在纳皮尔对数中，这个“10^7”是哪里来的？它的底为什么是 1/e?

我们用微积分很容易说明，在图 1-5 中，纳皮尔假设 $AB = 10^7$，则 $AC = 10^7 - y$，因而 C 点的速度就是 $-\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y$，即 $\mathrm{d}y/y = -\mathrm{d}t$，积分后就得到 $\ln y = -t + C$。把初始条件 $t = 0$ 和 $y = 10^7$ 代入这个式子，就得到积分常数 $C = \ln 10^7$，因此 $\ln y = -t + \ln 10^7$，就是 $t = \ln 10^7 - \ln y$。

现在，点 F 的速度是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 10^7$，因此 $x = 10^7 t$，所以

$$\text{Nap}\log y = x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 10^7\ln(10^7/y) = 10^7\log_{1/e}(y/10^7)$$

从这个过程可以看出，纳皮尔发明对数的时候，已经涉及形如 $y = \mathrm{d}(a-y)/\mathrm{d}t$ 这类微分方程了。

当然，当年纳皮尔并没有“底”这个概念，他的目的是为了制表。

另一个问题是，纳皮尔为什么要设 $AB = 10^7$ 呢？这显然

是为了避免小数运算。

纳皮尔为什么要发明对数呢？“我要尽我的力量，来免除计算中的困难和繁重工作，许多人由于讨厌它们，吓得都不敢学数学了。”纳皮尔曾经这样谈到它发明对数的动机。

纳皮尔的“自我表白”是完全可信的。那时，天文学家们十分热衷于星系的研究，这样有必要处理过去一般人很少涉足的“天文数字”。随之而来的是一门新的职业诞生了，一些专门从事计算的人，人们叫他们“计算师”的人开始登场。这些计算师们一天到晚忙忙碌碌，又被人称为“计算工匠”。可是，他们没有想如何改善计算方法或计算技术，于是，历史选择了纳皮尔，纳皮尔创造了历史。

1.5 科学更有力量——天才的遗憾

纳皮尔当然是一个天才，他多才多艺，对天文学、机械学都有深入的研究。例如发明燃烧镜、大炮、金属战车，特别精通于数学计算。按照美国数学史家霍华德·伊夫斯（Howard Eves）在1983年出版的《数学史上的里程碑》中的说法，除了发明对数以外，他至少还有3项天才的成果被载入数学史册，这3项成果如下：

（1）在三角学中，有他发现的、用于求解球面非直角三角形的4个比例式中的至少两个——“纳皮尔比例式”，或称“纳皮尔比拟”（Napier's analogy）。用 A，B，C 代表三角形的3个角，a，b，c 代表与之对应的3条边（都以角度数表示），这4个比例式是

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}$$

（2）三角学中10个公式的巧妙记忆法——“纳皮尔圆部法则”即“圆的部分法则”。

以上两项成果发表在1614年。

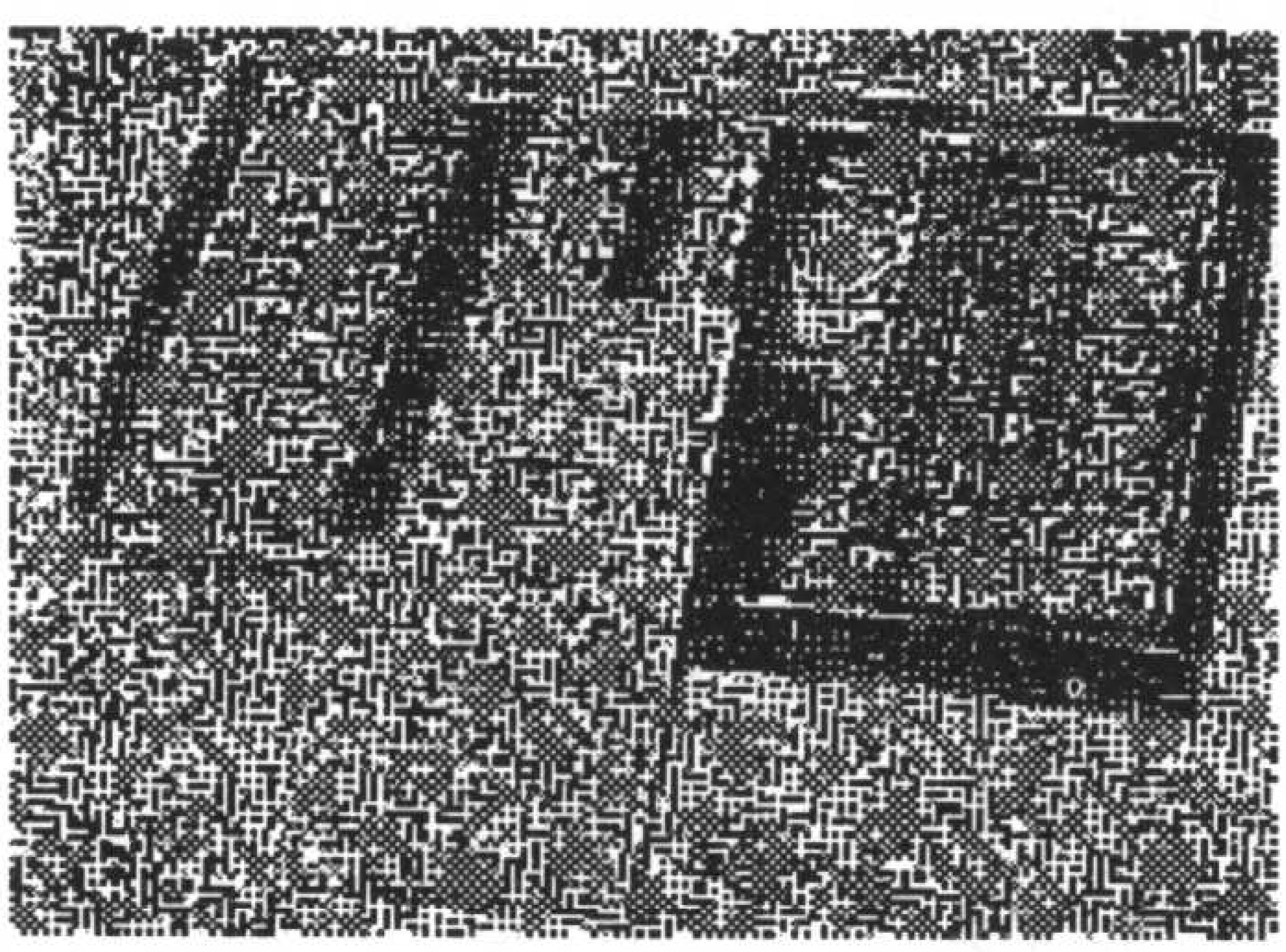


图1-6

（3）在1617年出版的《算筹术》(Rabdologiae) 一书中介绍的、机械进行乘除计算和平方根计算的“纳皮尔算筹”(Napier’s rode，图1-6)，即“纳皮尔尺”，被誉为世界上的计算机的萌芽。

纳皮尔发明的算筹不是中国古代的算筹，并不是根据对

数的原理制成的计算尺，而是一种根据 15 世纪以后流行在中亚和欧洲一带的“格子算法”的原理，制作的 10 条尺子（“卡片”）——由纸、骨板、木板、金属板等材料制成。图 1-7的左边是这 10 条卡片中的一条，上头的“6”的下面，是 6 的各种倍数，例如 6 往下数第 3 行的“18”，就是 6 的 3 倍。

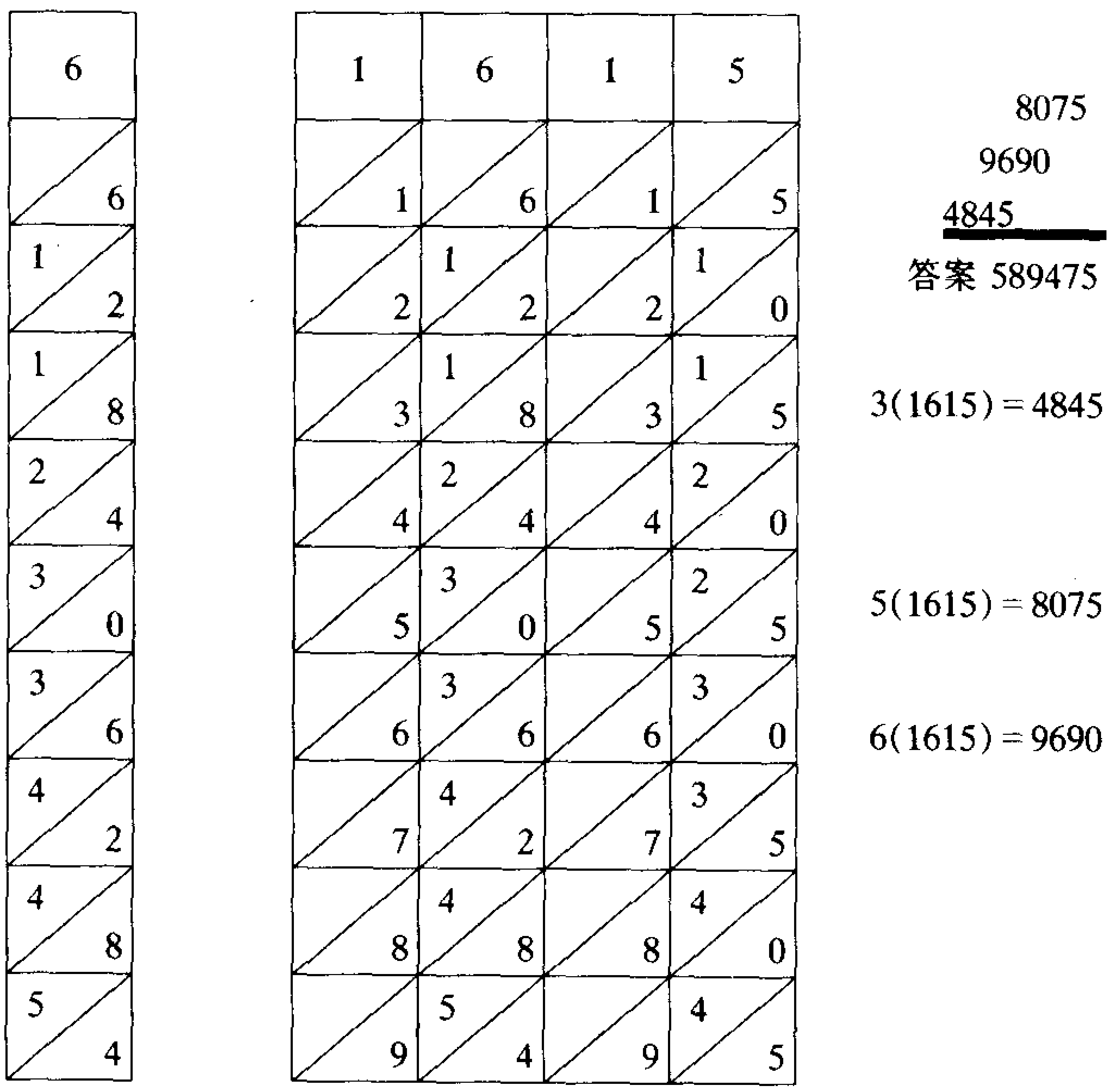


图 1-7　纳皮尔算筹

格子算法的计算方法是“斜行相加”。下面是《算筹术》中计算 1615·365 的一个实例：

先把分别“代表”1，6，1，5 的尺子按顺序排列如图 1-7 的右边。再分别读出 3，6，5 和它们的乘积 4845，9690，8075——如果对角线上有两个数字，应把它们相加，然后把

4845，9690，8075 相加，就得到答案 589 475。

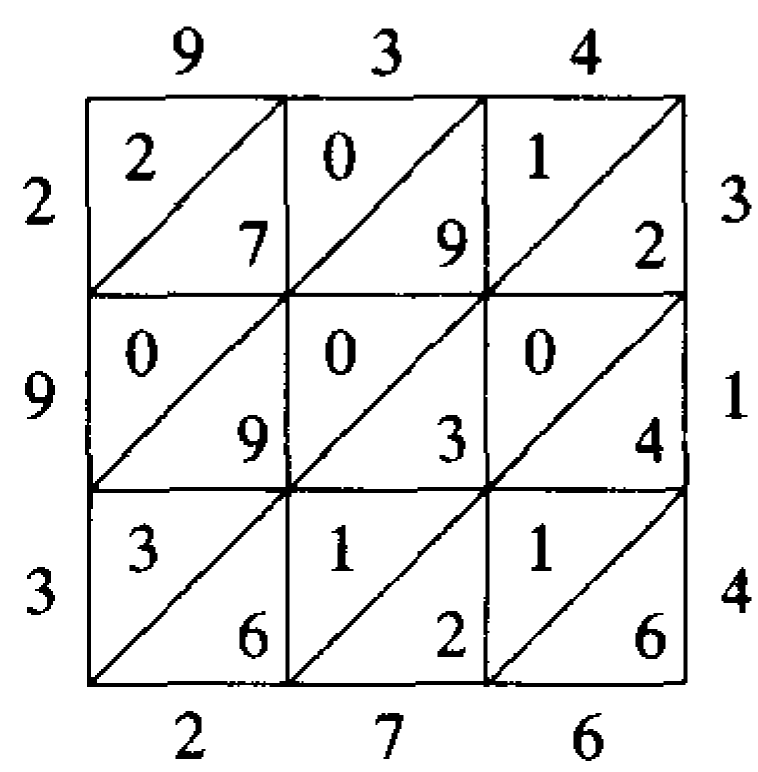


图 1-8

图 1-8 表示 934·314＝293 276，读者可自行体验计算方法。

此外，纳皮尔还写了《小数计算法》一书。

作为一位严格的长老会教友，纳皮尔拥护清教徒领袖约翰·诺斯克和英王詹姆斯一世的事业。他在1593 年出版《圣约翰启示录的一个清晰发现》(又译《约翰启示录大全的一般发现》、《约翰启示录大全》或《约翰启示录简释》）一书，强烈反对天主教，猛烈抨击罗马教会，声称上帝将在1688～1700 年间把世界推向末日。这本当时流传很广的书一直出了 21 版，至少有 10 版是他在世时出版的。

可悲和的遗憾是，纳皮尔深信，他的子孙将因为《约翰启示录大全》享受巨大的荣誉和福祉。然而事实证明他完全错了——现在我们知道他的英名是因为他发明的对数，而不是现在已鲜为人知的这本书。

于是，我们想起了纳皮尔的同胞弗朗西斯·培根（Francis Bacon，1561～1626）在《学术的进展》一书中的名言：“我们会看到智慧和学问之碑是怎样远比权利或武力之碑更加长垂不朽。”可以设想，如果他不是在这些政治与宗教的纷争中浪费了大量的时间和精力，就会在自然科学上有更大的成就。

然而，历史不相信如果，只诠释已然，因此纳皮尔的遗憾只能而且应该成为我们的前车之鉴。

1.6 承伟业自有来人——从布里格斯到弗拉格

其实，纳皮尔还有另一个遗憾，那就是他和布里格斯共同创建的伟业——关于对数的改进还没有完成，他就辞世了。

但是，年已 55 岁的布里格斯继承了双方的宏伟事业，以坚忍不拔的精神，继续研究、改进对数和编制对数表。

数学和天文学家布里格斯生于英国约克郡的乌里·乌顿，曾在牛津大学读书。另外两种说法是："1577 年入剑桥大学的圣约翰学院"学习，"分别于 1581 年和 1585 年获学士学位和硕士学位"；"在坎布里奇的约翰森中心学院毕业"。1596 年，他在当年新建成的伦敦格雷沙姆学院光荣担任几何学教授席位——英国第一个数学教授席位，教授几何和初等代数。

1619 年，布里格斯又到牛津大学萨维尔学院，担任了新设立的第一任萨弗尔数学教授，另一说是他"后来成为奥克斯夫大学的天文学教授"。这里提到的萨弗尔（Henry Savile, 1549～1622）爵士和学者，全称亨利·萨弗尔，是伊丽莎白女王的希腊文和数学私人教师。他在 1585 年担任麦尔顿（Merton）县知事，1596 年成为伊登（Eton）市的市长，1619 年在牛津大学设立几何学和天文学讲座。

布里格斯关于对数的贡献主要有两个，一是采用 10 为底，使计算更加方便。二是把纳皮尔的只限于三角函数的对数，扩改为一般数值的对数。

当然，布里格斯还有其他关于对数的贡献。例如引进对数的"尾数"（mantissa）一词——表示对数的小数部分。它起源于伊特拉斯坎语的一个晚期拉丁名词，原来的意思是"附加"

(addition) 或"补缺"(make weight),到了 16 世纪才有"加尾数"的意思。不过"尾数"这个词在数的"浮点表示法"($x = a \cdot 10^n$)中,也用来表示其小数部分 a;这里 $0.1 \leqslant |a| < 1$。所谓浮点表示法,简称浮点(floating point)法,是误差分析中数的舍入方法中的一种,另一种是定点(fixed point)法。

又如,"首数"(characteristic)一词——表示对数的整数部分,也是布里格斯最早使用的。不过另有一种说法是,"对数尾数"一词最早出现在英国数学家沃利斯 1693 年的《代数》一书第 4 页中。当然,这些术语在欧拉 1748 年的《无穷分析引论》(Introduction in Analysis Infinitorum)出版之前,都没有流行起来。

此外,布里格斯在数学领域还有其他贡献。例如他编制的 15 位数字的正弦函数表和 10 位数字的正切和正割函数表,在 1633 年刊行后沿用了 200 多年。他还在 1620 年编辑出版了欧几里得(Euclid,约公元前 335 至 330~前 275)的《几何原本》前 6 卷。

经过 1 年多的努力,布里格斯在 1617 年制成了真数 1~1000 的 14 位尾数的常用对数表。这是一本 16 页的 8 开本小册子,书名是《100 个数的对数》(Logarithmorum Chiliades Prima)。其中的一部分如表 1-3 所示,它是有史以来的第一张 14 位常用对数表。

表 1-3

数	对　数
1	0.000 000 000 000 00
2	0.301 029 995 663 98
3	0.477 121 254 719 66
…	…
34	1.531 478 917 042 26
35	1.544 068 044 350 28
…	…
67	1.826 074 802 700 83

接着，布里格斯又开始了一项庞大的计划——把 1～100 000 之间的全部整数的 40 位对数计算出来。

再经过 7 年多的努力，63 岁的布里格斯在 1624 年出版了《对数算术，或 3 万个数的对数》（Arithmetica Logarithmica, sive Logarithmorum Chiliades Triginta）一书。由于书名较长，所以简称为《对数算术》即《对数》（Arithmetica Logarithmica），或《3 万个数的对数》（Logarithmorum Chiliades Triginta）。书中载有真数 1～20 000，90 000～100 000 这 3 万个数的 14 位尾数的常用对数表——世界上第一个常用对数表。

可是，布里格斯也是"出师未捷身先死"，他的常用对数表中 20 000～90 000 之间的"空隙"还没来得及填补，就乘鹤西去了！

当然，继承伟业的还有纳皮尔的儿子罗伯特（Robert）、R. 纳皮尔和后裔 M. 纳皮尔等。例如，罗伯特和布里格斯一起整理纳皮尔的遗著，《奇妙的对数表的构造》就是 R. 纳皮尔整理出版的。M. 纳皮尔也整理了纳皮尔的一些研究成果，在 1639 年出版了《算术技巧》一书。

科学是一根接力棒。这时，这根接力棒传到了英吉利海峡那一边——盛产郁金香的国度荷兰。

接过接力棒的是荷兰人德斯克（E.Decker）和荷兰出版商兼书商阿德里安·弗拉格（Adrian Vlacg（或 Vlacq），1600～1667）。1628 年，他们补齐并出版了也称《对数算术》的书，填补了布里格斯对数表中 20 000～90 000 之间的"空隙"。当然，他们的这个对数表是 10 位数的。如果从 1615 年布里格斯访问纳皮尔算起，这个表造了 13 年！

后来，弗拉格又整理出版了布里格斯的三角函数十进制

对数表。他修订出版的这些对数表，很快在欧洲得到普遍使用。

一代著名数学家弗拉格生于荷兰高达，死于荷兰名城海牙。

1.7 伟大发明生“龙胎”——红极一时的“尺子”

对数诞生之后不久，就生下了“龙凤双胞胎”——“龙胎”对数计算尺，“凤胎”对数表。

对数计算尺（以下简称计算尺）旧名 Rechenschieber，是尺形或盘形的一种计算工具，通常由定尺、滑（动）尺和游标这三部分组成。

说起计算尺那300年“火红的岁月”，现在的年轻人难以理解其间的“红火”。直到20世纪六七十年代，学者、工程师们还在为拥有一只“ARISTO”（一种著名的通用计算尺的型号）而骄傲，或者为得到它而努力。当本书主要作者在20世纪60年代第一次接触它的时候，就被它的神奇所折服——只要把尺子一拉，什么乘法、除法、乘幂、开方、对数、三角函数等等的结果就出来了！在中国，直到1965年还有《计算尺的原理与用法》这类书籍出版。

那么，计算尺为什么有这么大的魔力呢？

这得从计算尺的工作原理说起。

以做乘除法为例，计算尺就是用我们在前面1.2中提到的德国数学家斯蒂费尔计算16·128和2048/128所用的“化乘除为加减”的方法作为工作原理。这种方法的部分理论依据是 $\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$ 和 $\log_a M-\log_a N=\log_a(M/N)$。

下面具体以一个乘法题 2·3 为例，说明计算尺是如何工作的。

图 1-9 是一种近现代实用的计算尺，一条活动尺可以在上下两条定尺之间的滑槽中滑动。这些尺的正反两面都刻有密密麻麻的、供进行各种计算的数字和刻度。中间矩形的“方块”，是也可以滑动的游标。

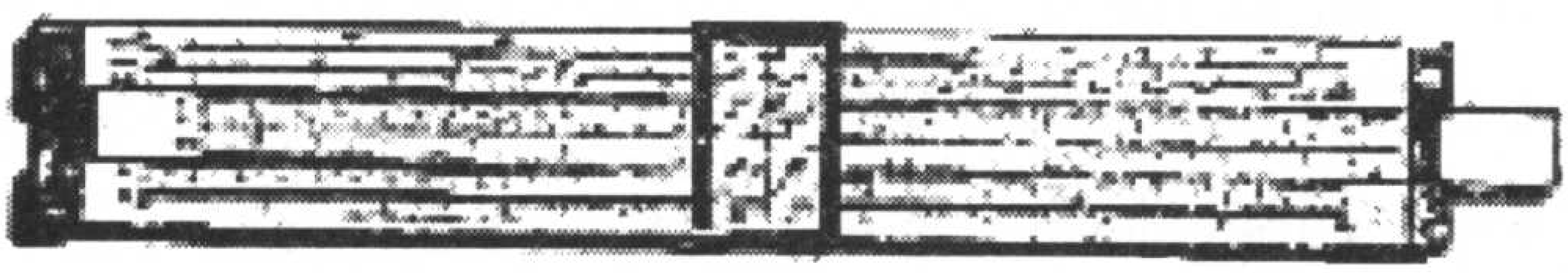


图 1-9　20 世纪的双面直计算尺

图 1-10 中的 D 尺和 C 尺，分别是图 1-9 中的下固定尺和活动尺。运算的时候，只要如图 1-10 把活动尺上“原数”3 的“代言人”lg3（=0.477）和下固定尺上“原数”2 的“代言人”lg2（=0.301）“相加”，就得到 2·3 的“代言人”lg2 + lg3（=0.301 + 0.477 = 0.778）了。

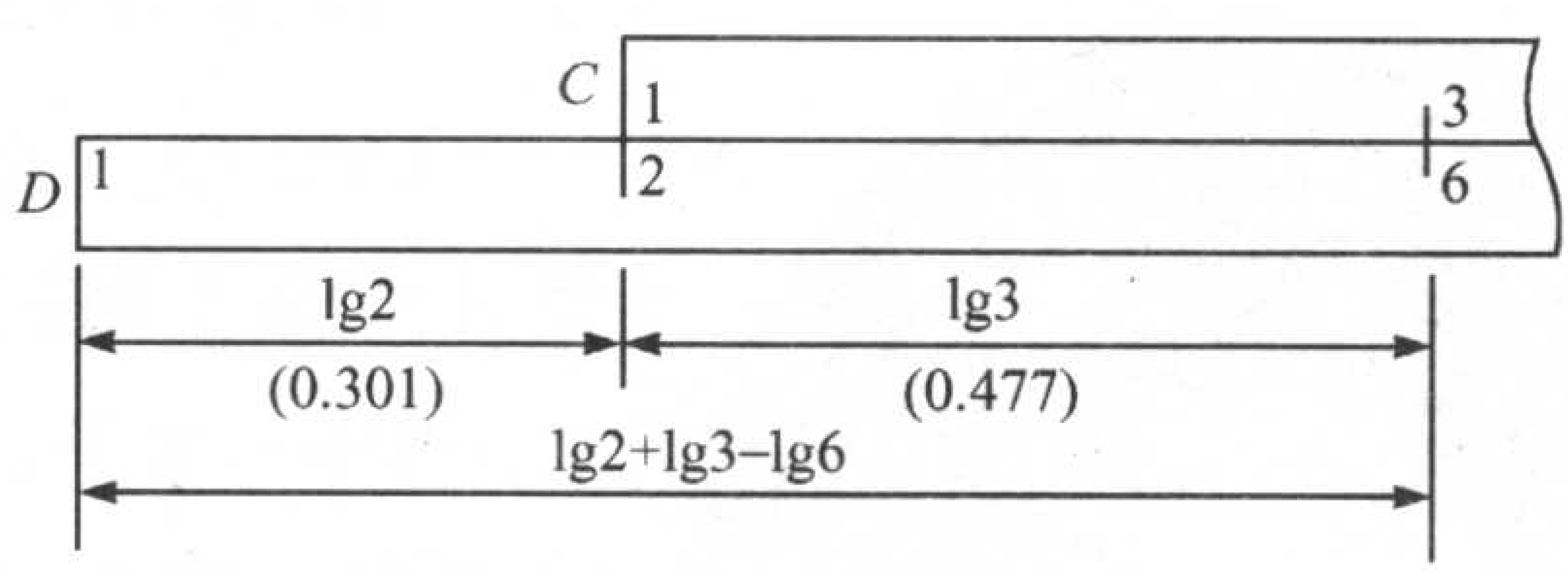


图 1-10　lg2 + lg3 = 0.301 + 0.477 = 0.778

这时，在下固定尺上，就可以在对准活动尺上刻有 3 的地方，得到答案 6——“代言人”lg2 + lg3（=0.778）的“原数”。

这里，我们提到了的“相加”，在图1-10中一目了然——把活动尺上刻的1对准下固定尺上的2就行了。于是，整个计算过程可以用“1对2看3得6”来概括。

当然，近现代实用的计算尺也是许多先贤劳动的结晶。

最早的计算尺是纳皮尔创制的“小计算尺”。

最早研制出较实用计算尺的是英国人冈特（Edmund Gunter，1561或1581～1626），他和布里格斯一样，也毕业于牛津大学，而且和布里格斯在同一个大学——格雷沙姆学院教授天文学。同胞、同学、同事、同研究对数，这也是数学史上一个有趣的巧合。冈特在1624年设计的正弦和正切的对数计算尺有近现代计算尺的萌芽——称为“冈特之链”，当时用于航海，为测量员所熟知。

1630年，冈特的同胞爱德蒙·温盖特（Edmund Wingate，1593或1596～1656）在《天然与人工的算术》中也有类似的发明。同年，德拉曼（Richard Delamain）在《数学环》中说明了他发明的圆环形计算尺，并献给英王查里一世（Charles Ⅰ），得到了英王的赏赐。

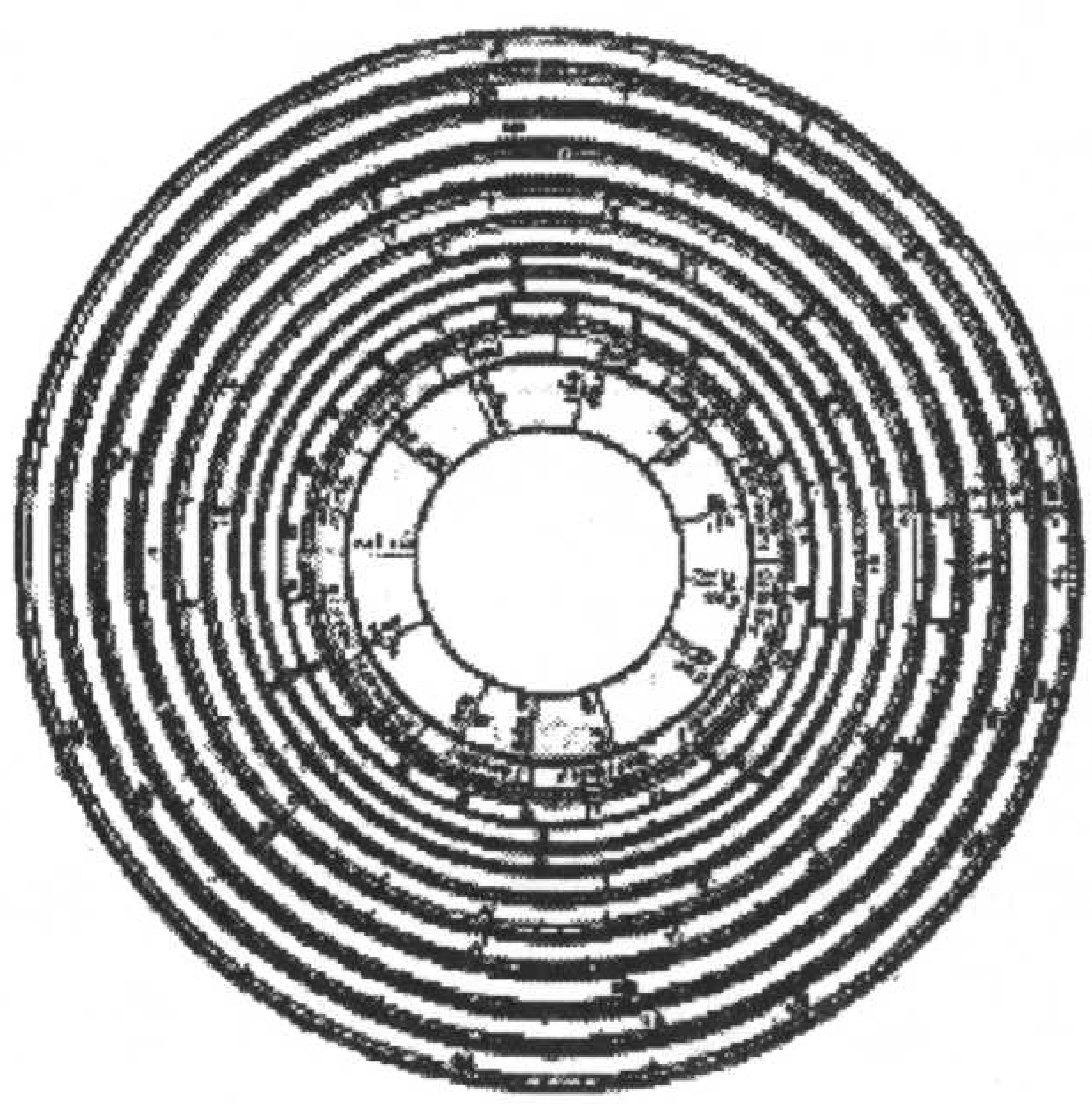


图1-11　奥特雷德的圆形计算尺

1632年，英国数学家奥特雷德在用拉丁文写的《比例圆与水平仪器》一书中详细地描绘了他的圆形计算尺（图1-11）。它是几个套在一起的圆环，可两面使用。这本书由他的学生福斯特（William Foster）翻译成英文时，在序言中

特别提到“有人窃取了这一发明成果”，暗指德拉曼的圆形计算尺，这引起了一场发明优先权的争辩。德拉曼曾是奥特雷德的学生，有可能在学习过程中得到某种启示，但历史学家们则更倾向于两者都是独立的发明。

1654 年，比萨克（Robert Bissaker）研制的有固定尺身和滑尺的计算尺，现收藏在伦敦南肯辛顿科学博物馆。类似的发明还出自帕特里奇（Seth Partridge）之手。

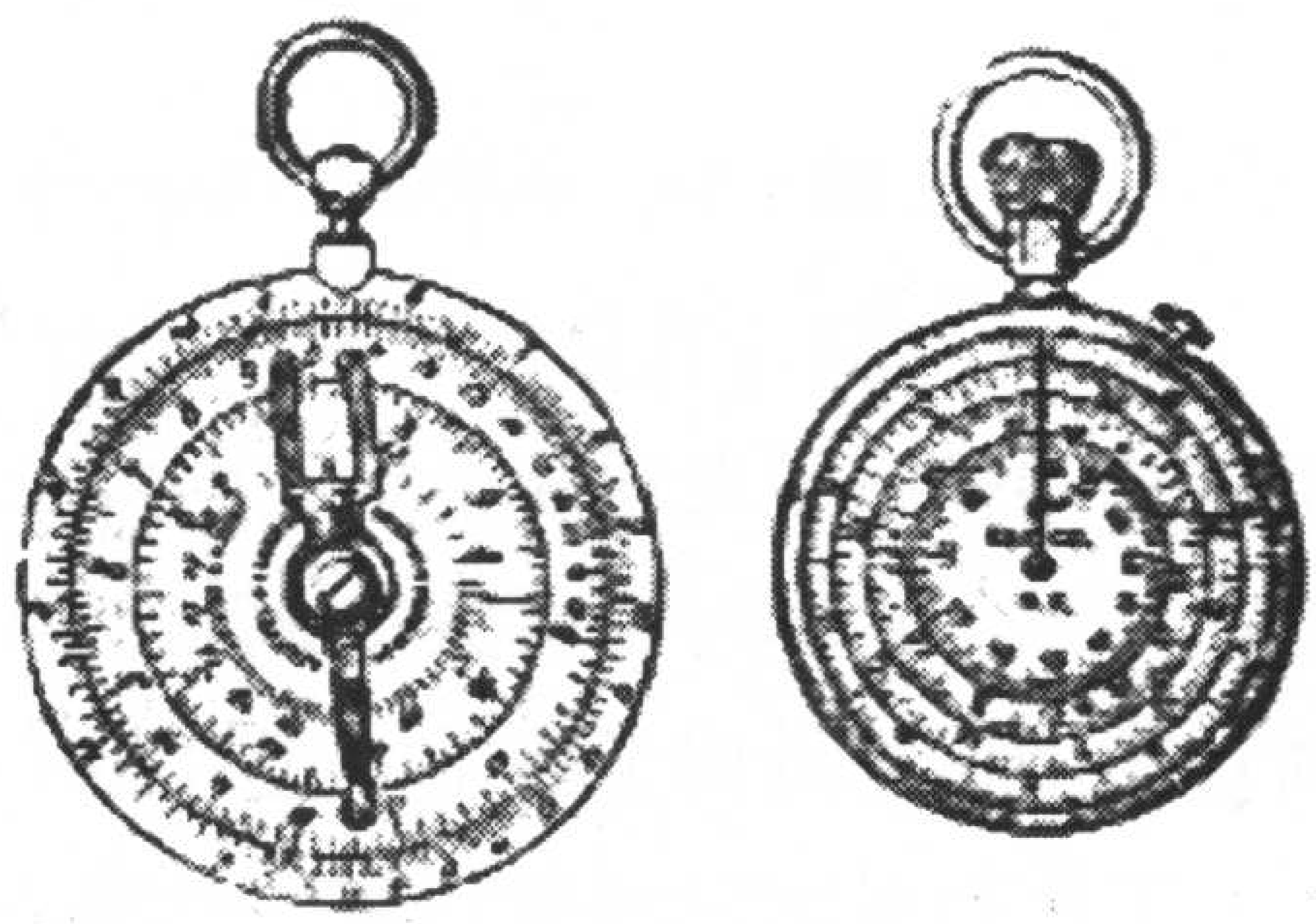


图 1-12　夏庞蒂埃和鲍彻的计算尺

其后 200 年间，形形色色的计算尺如雨后春笋，但直到 1850 年法国人曼海姆（Victor Mayer Amédée Mannheim，1831～1906）把游标装上之后，才有了近现代计算尺的雏形。

夏庞蒂埃（Charpentier）的圆形计算尺和鲍彻的（Boucher）表形计算尺如图 1-12 所示。图 1-13 则是富勒（Fuller）的螺旋形计算尺。

图 1-14 是撒切尔（Thacher）的圆柱形计算尺，它相当于一本 5 位对数表，是所有对数计算尺里最精密的，其缺点是携带不方便。

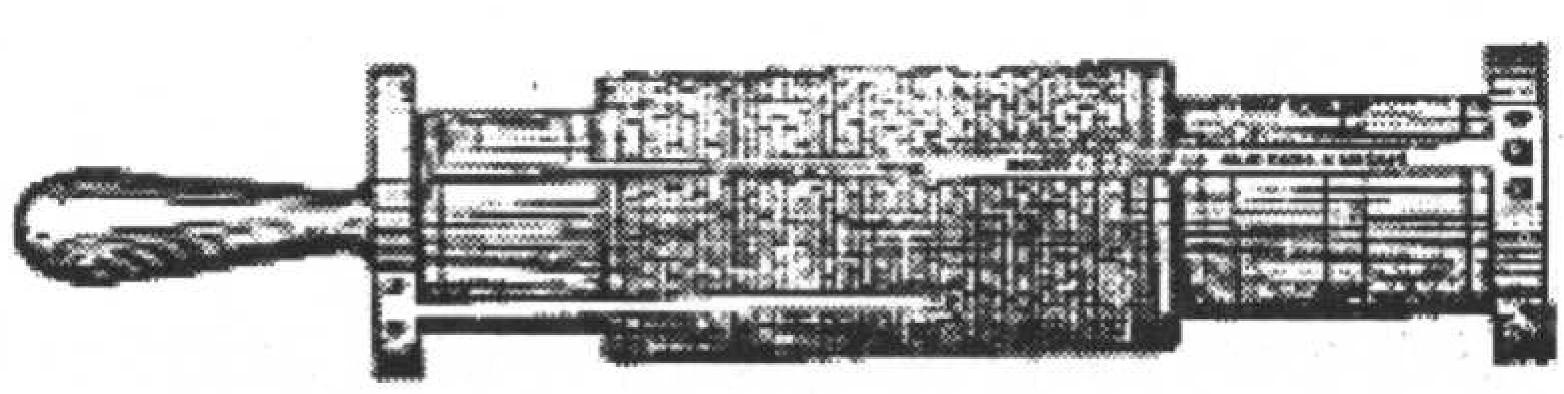


图 1-13　富勒（Fuller）螺旋形计算尺

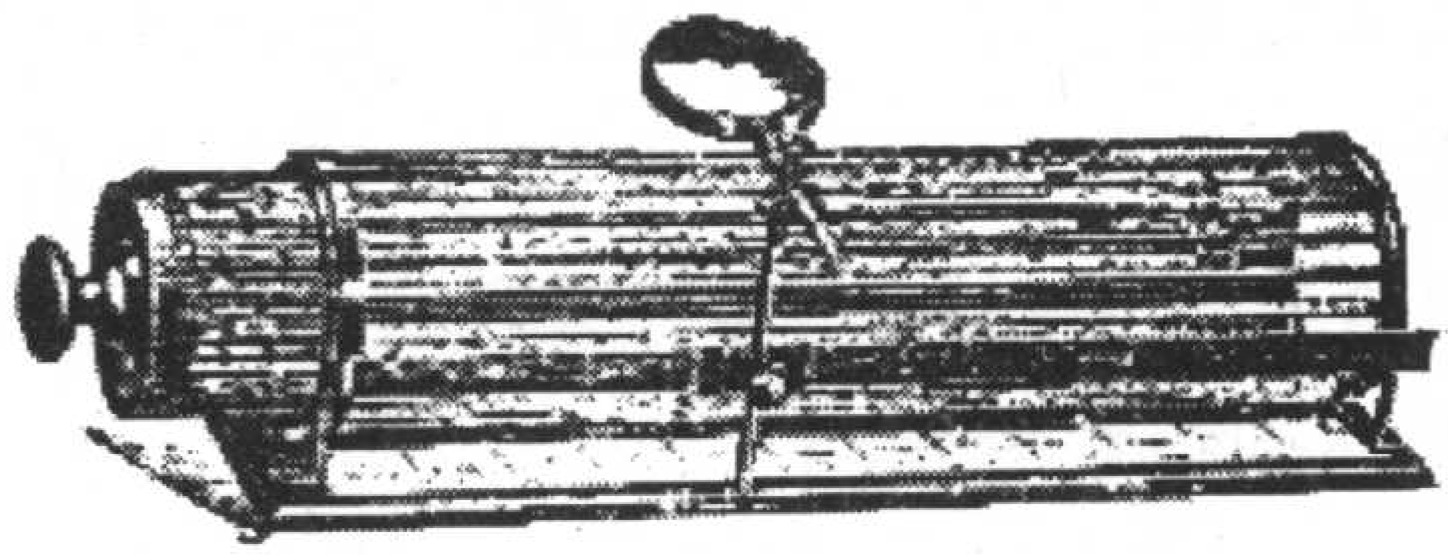


图 1-14　撒切尔（Thacher）圆柱形计算尺

在 19 世纪计算尺已经基本定型，并在该世纪末大量生产，所以总共显示了大约 3 个世纪的威力。例如，当年牛顿就很熟悉它，曾用它解过 3 次数字方程。当然，形形色色、种类繁多的计算尺不只是用于数学，还可用于快速计算各种描述量。

不但数学家对研制计算尺兴趣盎然，其他科学家也饶有兴味地加入研制的行列。例如，英国物理学与化学家武拉斯顿（William Hyde Wollaston，1766～1828），为了便于工业化学家的应用，就发明过一种化学当量对数计算尺，用于计算化学反应的产量，使当量定律在生产中广为应用。

现在，对数计算尺几乎完全被袖珍计算器取代而进了历史博物馆，生产厂家也“关门大吉”，但它在历史上依然占有光辉不灭的一席之地。

1.8 伟大发明生“凤胎”——红极一时的“表格”

自从纳皮尔造出正弦的对数表之后，形形色色的对数表应运而生。

但是，纳皮尔的正弦对数表是以 1/e 为底的，使用起来很不方便。于是当 1615 年布里格斯访问纳皮尔的时候，双方就一致认为，如果把对数改变一下，使得 1 的对数是 0，10 的对

数是 10 的一个适当的幂，那么编造出来的对数表会更加有用。这样就有了后来中学课本中的那种常用对数表，也就是布里格斯对数表——以 10 为底的对数表。

那么，为什么以 10 为底的对数表“更加有用”呢？

这是因为在数值计算的时候，以 10 为底的对数表具有很大的优越性。

那么，为什么会有这种优越性呢？

我们知道，在大多数情形下，我们现在使用的数系是以 10 为基数的。同样的道理，对于以其他数（例如 2）为基数的数系，也应该编造以其他数（例如 2）为底的对数表。

布里格斯访问纳皮尔返回伦敦之后，就全力编造常用对数表，于是有了我们在 1.6 中提到的 14 位常用对数表——世界上第一个常用对数表，以及弗拉格的补充。他们发表的 4 个对数表，直到 1924～1949 年，才被为纪念对数发明 300 周年在英国出版的 20 位对数表所代替。由此可见，布里格斯和弗拉格的对数表也显示了大约 3 个世纪的威力。

此后，对数表的发展主要体现在以下两个方面：研制各种用途的对数表，改进对数表的位数。至于编制对数表“技术”的改进，我们将在 4.4 中叙述。

在编制各种用途的对数表方面，数学家们进行了不懈的努力。下面是一笔“流水账”。

1616年，“第一张自然对数表”以 ln (10×10^6) 的形式出现在我们 1.3 中提到的英国 S. 赖特出版的那本译著的附录中。我们已经知道，这本译著是纳皮尔的《奇妙的对数定律说明书》的英文版，翻译者是 S. 赖特的父亲爱德华·赖特 (E. Wright)。不过此时爱德华·赖特已经死去。

这本译著中包括72个正弦值的对数，都是略去了小数点的自然对数值。这本译著附录的思想来自乌特勒，其中有一个关于 $\ln10=2\ 302\ 584$ 的说明，它是略去了小数点的10的自然对数值——$10^6\log_e10$。

1619年，伦敦的中学教师约·斯皮德尔（J.Speidell）出版了《新对数表》（New Logarithmes）一书，书中包括0°～90°以每1′为间隔的正弦、正切和正割的5位（一说6位）对数表。当这本书再版于1622年的时候，载有1～1000的对数表，它们虽然与自然对数完全不同，但书中的方法可以导出自然对数表，所以一些文献也把他的表称为“第一个自然对数表”。

1620年，布里格斯在格雷沙姆学院的同事冈特，出版了间隔为1′的0°～90°正弦和正切的7位常用对数表。这个对数表的书名较长——《三角形规则，或到 10^8 的正弦和正切的对数表》（Canon Triangulorum sive Tabuloe Simuum et Tangentium Artificia lium ad Radium 10^8）我们多次提到的冈特，也是余弦（cosine）和余切（cotangent）这两个名词的创造者。



图1-15　开普勒

1624年，德国数学家开普勒（Johannes Kepler，1571～1630）（图1-15）在马尔堡出版了一种纳皮尔的正弦对数表，促进了对数在德国的流行。

开普勒更是一位著名的天文学家，他先后在1609和

1619年发现的行星运动三大定律，是数学史和天文学史上的里程碑。他自信而自豪地在记有这些定律的《宇宙谐和论》一书中写道："我沉醉在神圣的狂喜之中……我正在为同时代的人或后代——那无关紧要——写一本书。我的书也许要等 100 年才有一个读者，上帝不是等了6000年才等到一个观测者吗？"

这里之所以说是数学史上的里程碑，是因为经过古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius（或 Apollonius of Perga），约公元前 260～约前 190）系统化了的圆锥曲线理论，此时才第一次用在实际问题——行星运动三大定律之中，为"纯理论"迟早会大放光芒提供了一个有力的实证，并提醒人们不要轻视"基础科学"。

这里之所以说是天文学史上的里程碑，是因为行星运动三大定律为行星的运动制定了"法律"，此前的天文学家们被"无法可依"的行星运动搞得焦头烂额。所以人们把开普勒誉为"天空立法者"。

1625 年，爱德蒙·温盖特又在巴黎出版了《对数算术》（Arithmetique Logarithmetique）一书，包括 1～1000 的 7 位对数，还包括正弦和正切的对数。这是出现在欧洲大陆的第一本布里格斯对数表。

1631 年，雷恰·诺乌出版了《三角学，或关于三角形的学说》两卷本，都是根据对数这一杰出成果编制而成的。这本书有助于对数的推广和对数表的编制。

晚年的布里格斯也一直在计算间隔为 0.01°的 13 位三角函数的对数，在他逝世的时候几乎完成了。后来这项工作由他在格雷沙姆的另一个同事亨利·杰利伯兰全部完成，并在 1633 年

以《不列颠的三角，或关于三角形的学说》(Trigonometria Britannica, sive Doctrina Triangulorum) 为名发表。大致同时，弗拉格也出版了他的《三角对数表》(Trigonometria Artificialis)，给出了以 10″为间隔的正弦、正切和正割的 7 位对数值。

1778 年，荷兰数学家沃尔弗拉姆（Isaac Wolfram，18 世纪）完成了 1～10 000 的有 48 位的 10 进数码自然对数表。此外，他还计算出具有 63 位和 88 位 10 进数码的素数对数表。

1827 年，计算机先驱、英国数学家巴贝吉(Charles Babbege, 1792～1871) 也编制了一个对数表，包含 1～108 000 的自然对数的值。

在编制位数不同的对数表方面，数学家们更是不遗余力。

从布里格斯和弗拉格的 14 位对数表，到 1795 年法国卡莱编的 2～1200 的 20 位对数表，到沙尔普的 61 位自然对数表，位数越来越多。而帕尔克赫尔斯特的自然对数表竟多达 102 位！不过，这 102 位还不是对数表位数的冠军。冠军应该属于英国天文学、数学家亚当斯（John Couch Adams，1819～1892）的 260 位对数表。这个亚当斯就是大家熟悉的、独立计算出海王星轨道的两个人之一。我们知道，另一个独立计算出海王星轨道的是法国天文学家、数学家勒·威烈（Urbain Jean Joseph Le Verrier，1811～1877)。

实际上，这个亚当斯的表实际上并不是表，而只是 2，3，5，7，10 这 5 个数的自然对数，以及一个 260 位的“换算因数”，用来把它们换算成常用对数。

不难明白，有了这 5 个数的自然对数，就可以用简单的加法或乘法得到各个合数的对数；例如，12 的对数就等于 2，2，3 的对数的和。这就怪不得苏联数学家、教育家、科普作家别

莱利曼（Яков Исидорович Перельман，1882～1942），在《趣味代数学》一书中，把这个表称为“超级壮观”！

越来越多位数的对数表自然是为了实际需要。但是，这也有 3 个缺点。一是“本本”太厚，携带不便；二是因太厚而查阅不方便，使计算速度减慢；三是在多数情形下多位值没有用，因为计算的准确度不可能超过测量的准确度。于是弗拉格就把他填补的 14 位对数表压缩为 10 位。1794 年，出现了 7 位表，但这时仍有 200 页。后来又演化为学校里用的只有 30 页的 5 位表，用它来计算，比 7 位表省时一半。最后变为中学生们书包里的 3 页 4 位表。

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	18	23	26	39
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1679	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2330	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2023	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3635	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3027	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 1-16　一种四位常用对数表的一部分

在这种 4 位对数表中，著名的有由苏联数学家伯拉基斯

（Вла димир Модестович Брадис，1890～1975）编著的、1953 年在莫斯科出版（第 24 版）的《四位数学用表》中的“（四位）对数表”。人民教育出版社曾在同一年翻译、改编后出版，并 长期作为在普通中学使用的数学用表。

把“本本”变薄的另一个措施是，只印尾数，不印首数来节约篇幅，这个“现代习惯”从 18 世纪起已“约定俗成”。但是在早期的对数表中，却既印尾数，也印首数，而不是像现在这样只印尾数。

由于大部分技术只需要 3 位尾数的对数表就够了，所以别莱利曼建议，只要 1 页的 3 位对数表就行了。

有人统计过，各种各样的对数表已经超过 500 种。

当然，随着科技的发展，现在对数表基本上被袖珍计算器取代，退出了历史舞台，甚至一些著名的数学手册已经删去对数表，但它在历史上的光辉却不可磨灭。

现在，对数计算尺和对数表这些传统计算工具，已经基本上退出了历史舞台，说明对数在计算技术上的重要作用已经日见消失，甚至一些学校中已经不把对数作为一种纯计算的方法来讲授，这说明科技发展的迅猛是何等惊人。但是，对数将“乘除化为加减”以简化繁难计算的思想方法却依然闪耀着千古不灭的光芒，并逐步形成现代数学中的“关系－映射－反演”（RMI）原则，这是我们至今对它“恩爱有加”的原因之一。

“落红不是无情物，化作春泥更护花。”现代科学的满园艳丽之花，不就是在对数计算尺和对数表这些“落红”的“培护”下成长起来的吗！

1.9 并非"风景这边独好"——"杀鸡杀喉"比尔吉

"莫道君行早，更有早行人。"把这句中国的谚语用在对数的发明上，也十分恰当。

原来，在纳皮尔制成对数表之前，已经有一位"早行者"制成对数表了。他就是瑞士的一位教师，也是一位"仪器制造者"——主要从事钟表生产的杰斯特·比尔吉（Jobst（或 Joost）Bürgi（或 Burgi），拉丁名叫 Justus Byrgius；1552～1632）。

比尔吉生于瑞士列支敦士登，1579 年被推荐当了威廉四世的钟表匠——计时师，1604 年成为鲁道夫二世的皇家技师，居住在布拉格。爱好天文研究的比尔吉，曾经得到过著名的开普勒的赏识，并担当过开普勒的助手，在卡特琳天文台工作。比尔吉能"文"（发明对数等）能"武"（双手灵巧），当时被尊为难得的数学、天文学和工艺家，也有资料把他称为力学家。

比尔吉在数学上留下来的成果不多，但他和开普勒用逗号把整数和十进分数分开来，这被看作发明了小数。而开普勒则说："小数和对数是比尔吉发明的。"明显把小数的发明归功于比尔吉。

比尔吉花了大约 8 年时间，造出了如表 1-4 的等差数列和等比数列表。其中第一行等差数列被印成红色，第二行等比数列被印成黑色。

表 1-4

等差数列	0	10	20	…	$10n$
等比数列	10^8	$10^8(1+1/10^4)$	$10^8(1+1/10^4)^2$	…	$10^8(1+1/10^4)^n$

可以看出，上面等差数列中的 10 n 始终对应着下面等比数列中的 $10^8(1+1/10^4)^n$ 。现在，我们按照比尔吉的基本思想，对他的表稍微加以改动——换为另外的如表 1-5 所示的等差数列和等比数列表。

表 1-5

等差数列	0	0.0001	0.0002	…	0.000 n
等比数列	1	1.0001	$(1.0001)^2$	…	$(1.0001)^n$

在这里，等差数列中没有写出的 1（它显然出现在第 10 001项)，对应于等比数列中的 $(1.0001)^{10^4}$（它显然也出现在第10 001项)。由此可以看出，比尔吉在造他的对数表的时候，把对数的底选为 $(1.0001)^{10^4}=2.718\,145\,93\cdots$，它和 $e=2.718\,281\,828\cdots$，仅仅在小数第 4 位才开始不同。这就是说，比尔吉选的对数的“底”值，已经非常接近 e 值了！所以有资料说，比尔吉的对数是以 e 为底的。而另外的一些资料把他的对数称为“比尔吉对数”。另外，有不少资料说，比尔吉的对数以 1.0001 为底，这是没有看 $(1.0001)^{10^4}$中的 10^4 所致。当然比尔吉在编制对数表的时候并没有“底”的概念。

可能有读者要问，为什么要选等差数列中没有写出的 1 来研究呢？答案很简单：底的对数才是 1，所以只要找出对数是 1 的时候的真数 $(1.0001)^{10^4}$，就找到这个对数的底了。

那么，比尔吉实际上选择了非常接近 e 的值作对数的底，这是巧合还是必然？我们将在 4.4 中解答这个问题。

1620 年，比尔吉出版了简称《进数表》的大作《等差数列和等比数列》(Arithmetische und Geometrische Progrcss-

tabulen)，公布了他的发明。不过他没有署名，此时是纳皮尔发表对数成果 6 年，或纳皮尔老去 3 年。

但即使如此，究竟谁是对数的发明者，是否有一个人是抄袭等等问题，还是引起了一场争论。由于他们两人都曾声称花了很多年时间进行研究，各自开始的时间又没有确切的文字记载，所以除了比尔吉发表的年代比纳皮尔晚 6 年以外，其他都得不出令人信服的、有确实证据的结论。但是，下面的结论是多数人所接受的：纳皮尔的对数思想早于比尔吉；而根据比尔吉的手稿推断，他写成功于 1610 年，则早于纳皮尔。

此外，从纳皮尔和比尔吉创立对数的简单介绍可以看出，前者是通过几何途径得到的，而后者则是通过代数途径得到的。

在科技史中，有一个并不奇怪的、屡见不鲜的"同时现象"，而且经常伴生一个"殊途同归现象"，这两种现象我们简称为"双胞胎"。

举例来说明。19 世纪上半叶发现的能的转化和守恒定律，就是几乎同时由几个国家的不同科学家各自独立创立的，这是物理学中的"双胞胎"——同时现象和殊途同归现象最典型的例子。

当然，数学也不例外。

熟悉数学史的人都知道，数学中的"双胞胎"不计其数，微积分、解析几何、非欧几何的创立就分别是典型的例子。

技术中"双胞胎"的例子是液晶、显像管、等离子、发光二极管这几种显示器都各自大致同时取得成功，广泛应用于诸如彩电、电子计算机等领域。飞利浦公司的黑底显像管和其他公司的非黑底显像管，都能显示逼真动人的图像，是又一个例子。

科技中的"双胞胎"——应了一句中国谚语"杀鸡杀喉，

各有各的刀路”，不但说明了“条条大道通罗马”，而且给我们以深刻的启示：当时代召唤某项科技的时候，当科技时机成熟的时候，我们必须“只争朝夕”，否则就会落在别人的后面。

科技中的“双胞胎”现象，值得深思、面对和研究。

1.10 天文学家延寿一倍——拉普拉斯如是说

“现代计算方法之所以有奇迹般的力量，是由于3个发明，即阿拉伯记数法、小数和对数。”在两卷本的《数学符号史》(A History of Mathematical Notations) 一书中的149页这么说。这本书是美国数学史家卡约里 (Florian Cajori, 1859～1930) 在1928～1929年出版的这方面的经典之作。

对数这项伟大的发明，得到许多数学家的赞美和史书的记载。例如，英国数学家哈顿 (Charles Hutton, 1737～1823) 在他的《数学游览》一书中，就辟出专门篇幅写了“对数发展史”。又如，美国现代数学史家霍华德·伊夫斯在《数学史上的里程碑》一书中，也把“纳皮尔发明对数”列入43个“数学里程碑”中，按发明年代先后排列的第19个。

科学家中最有名的赞美来自法国著名的天文学、数学家拉普拉斯 (Pierre Simon-Laplace, 1749～1827)，他在数学上的贡献我们将在后面的章节中多次提到。

拉普拉斯在他的天文学巨著《宇宙体系》中，深有体会地评论对数：“可以把几个月所做的计算减少到几天完成，由于缩短了计算工作的时间，我们可以说这种方法使天文学家的寿命被延长了一倍，而且使他们少犯错误，以及因为长时间计算而造成的不可避免的烦闷。这种完全由学识而来的发明是人类

精神上的宝贵成就；在工艺上人们依赖自然界的物质和能量才能做出发明，而计算技术却只靠人们自己的创作。”

是的，对数把乘方、开方这第三级运算，转化成乘、除这第二级运算，而第二级运算又可转化成加、减这第一级运算，这样“繁难”就变成了“简单”。从这里可以看出对数的魅力，这就难怪拉普拉斯会这么兴奋。

由于对数的巨大作用——特别是在天文学领域，开普勒于1624年热情地在德国做了大量的推广工作，例如在马尔堡出版了一种纳皮尔对数表。1625年，长期滞留在法国的英国数学家爱德蒙·温盖特在法国也做了类似的工作。意大利数学家卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri，约1598～1647）在意大利也热忱宣传之。

当然，赞美发明对数的不只是数学家或其他自然科学家。例如，“哪一样都不外行”的、“欧洲最博学的人”恩格斯，在谈到近代科学产生时期的主要成果时，不但把对数看成是17世纪确定了的最重要的数学方法之一，而且进一步把它和解析几何、微积分，并列为“最重要的数学方法”。

最夸张的恐怕要数大名鼎鼎的意大利科学大师伽利略(Galileo Galilei，1564～1642)了，他说：“给我空间、时间和对数，我可以创造一个宇宙!”看来，他的口气仅次于莱布尼茨的“从虚无创造万有，用一就够了”，比那位扬言可以用杠杆撬动地球的伟人——阿基米德（图1-17）的口气还大。



图 1-17　阿基米德

为了纪念对数这一伟大发明，尼加拉瓜在1971发行了一套10枚的纪念邮票，主题是“10个最重要的数学公式”。其中除了我们熟悉的毕达哥拉斯定理即勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 以外，还有重要的 $\log_a N$。这里提到的毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前560～480）是古希腊数学家，以他的名字命名的学派在数学史上非常著名。

1.11 “迟到的爱”——对数在中国

1648（一说1646）年，波兰传教士穆尼阁（Jean Nicolas Smogolehski，1611～1656）来华，向薛凤祚（1600～1680）、方中通（1633～1698）等中国清代初年的数学家教授对数、三角学等，从此对数开始传入中国。

1653年，薛凤祚和穆尼阁共同编译出版了《比例对数表》一书，正式把对数介绍到中国。穆尼阁死后，这本书成为薛凤祚编撰的《历学汇（会）通》中数学部分的重要内容。

在《比例对数表》中，把logarithm（对数）一词翻译成“比例数”或“假数”。对于对数表的作用，也赞美有加：“今有对数表，则省乘除、而况开方、立方、三、四、五方等法，皆比原法工力十省六七，且无舛错。”其中列出了1～20 000的6位的对数表。而《历学汇通》中的《比例四线新表》里，则列出6位的4种三角函数（正余弦、正余切）对数表。

1723年，康熙皇帝组织编撰的“康熙御制”《数理精蕴》出版，其中下篇·卷三十八“对数比例”一节中，首先就说：“对数比例乃西士若往·纳白尔（John Napier）所作，以假数与真数对列成表，故名对数表。”这里的“假数”，也是指 $\log_a N=b$ 中

的 b——我们现在叫"对数"，而"真数"和现在的含义一样——指式中的 N。这样，把"真数与假数对列成表"，所以叫"对数表"。后来"假数"逐渐不用，只把 b 叫做 N 的对数。这里的"若往·纳白尔"，就是我们所说的纳皮尔。

《数理精蕴》中的"对数比例"一节，比《历学汇通》更详细地阐述了对数和对数表，并给出编造对数的 3 种新方法。此外，还列有 1～100 000 的 10 位常用对数表、间隔 10″的 7 位三角函数表和 10 位三角函数对数表。

说起对数在中国，还有一个趣味故事呢。清代数学家戴煦（1805～1860）无心功名，但对于对数却"情有独钟"。他认为，旧的求对数的方法头绪纷繁，让初学者一头雾水，接着望而却步，于是潜心着力改进。功夫不负有心人，他终于发现几种计算对数的简捷方法，并在 1845～1852 年间编著成总书名为《求表捷数》的 4 本书。

两年后的 1854 年，英国人艾约瑟（Joseoh Edkins，1823 或 1825～1905）在中国的李善兰（1811～1882）、张福僖两位数学家处，看到戴煦的著作后大为折服，于是专程到杭州拜访戴煦，但戴煦拒不接见。虽然艾约瑟大失所望，但对戴煦的崇敬不减，把他的书翻译成英文，寄到英国的"算学公会"。这是一段"对数佳话"。

故事中提到的李善兰，研究对数也有成就。他说，对数可以用几个"尖锥"的合积来表示。这里提到的"尖锥"，是指他发明的"尖锥求积术"中的一个图形。

在对数传入中国的时候，大约在 1680 年，英国人爱德蒙·温盖特那种计算尺已经传入中国，现在北京故宫博物院还藏有仿制品，上面写着"康熙御制"的字样。

中国数学家不但仿制计算尺，对此还有研究呢，邹伯奇（1819～1869）就是其中的一个。他研究的成果汇入他所著的《对数尺记》一书中，死后刻入 1873 年出版的《邹征君遗书》中，而他的实物则制作于 1853 年。

此外，在 1962 年，中国数学史家李俨（1892～1963）还写过一本《计算尺发展史》，这是中国数学家对于计算尺的重要研究。

由此可见，对数是在 17 世纪中叶从西方通过传教士传到中国的，不但很快得到中国数学家们"迟到的爱"，而且在继承的基础上还有发展。

有研究指出，"其实对数思想在我国古代就有了"，但却没能"开花结果"，就像我们说过的阿基米德和斯蒂菲尔那样。由此可见，在世界的各个角落，人类的先贤在黑暗中、探索中度过了多少岁月！

◎第二章

无处不在的对数——“天地英雄”大显神通

你以为一切都已经发现了吗？
那真是绝顶的荒谬；
这无异把有限的天边，
当作了世界的尽头。

——100 多年前的著名天文学家弗拉马利翁

“对数”二字几乎和“数学”形影不离：对数不等式、对数方程、对数函数、对数的幂级数展开、对数螺线、对数正态分布……

地上唱的，天上亮的，都有对数——e 是一个不折不扣的“天地英雄”。

2.1 “吹拉弹唱”也要讲数学——音乐中的对数

搞音乐（图 2-1）还要用对数吗？是的。



图 2-1　搞音乐也要懂数学

在音乐里的“等音程半音音阶”中，各“音程”并不是按照声音的频率——等价于按照声音的波长来等距离安排的，而是按这些数量的对数来安排的。当然，这种对数的底不是10或者e，而是2。

我们假定最低八音度（“零八度”）的“do”音的频率为 n 赫兹，那么第一八音度的“do”的频率就是 $2n$ 赫兹，而第 m 八音度的“do”的频率就是 $2^m n$ 赫兹，等等。我们再用 p 来表示钢琴的半音阶里的任意一个音调，把每一个八音度的基音“do”作为 0，那么，如果“sol”就是第 7 个，“la”就是第 9 个，等等。第 12 个音还是“do”，只不过高了一个八音度。因为在等音程半音音阶里，每一个后面的音的频率都要比前面一个的频率增大$\sqrt[12]{2}$倍，所以任意一个音——第 m 八音度里的第 p 个音的频率 N_{pm}，都可以用以下公式来表示

$$N_{pm} = 2^m n(\sqrt[12]{2})^p$$

把这个式子两边取以 2 为底的对数，就得到

$$\log_2 N_{pm} = m\log_2 2 + \log_2 n + \left(\frac{p}{12}\right)\log_2 2$$

或

$$\log_2 N_{pm} = \log_2 n + \left(m + \frac{p}{12}\right)$$

把最低的“do”的频率定为 1（即 $n = 1$），上面这个式子就变成

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}$$

从这个式子可以看出，钢琴键盘的号码 p 就是相应音调的频率的对数 N_{pm} 乘以 12。还可以看出，表示出八音度的号码 m 乘以 12，就是对数的首数，而表示出音调在这个八音度里的次序的 p，则是对数的尾数。

例如，在第三个八音度中的“sol”这个音，就是说在 3 + 7/12≈3.583 这个数里，数 3 是这个音的频率的用 2 做底数的对数的首数，而 7/12≈0.583 是这个对数的尾数，因此它的频率是最低八音度中的“do”音的 $2^{3.583}$倍，即约 11.98 倍。

对于音乐的数学研究，科学家们从来就没有停止过，而最伟大的成就来自中国。

中国明代数学家朱载堉（1536～1611），在世界上首先于 1581 年创立的“新法密律”，即十二平均律理论，就用第一弦的长度除以$\sqrt[12]{2}$得到第二个音的弦长，以下用相同的方法求得各个音的弦长。后来他还将这个理论推广应用到律管上。

朱载堉创立的理论的时间，比荷兰数学、物理学家斯蒂文独立提出相同的理论早约 3 年。

对于朱载堉的成就，英国著名科学史家李约瑟（1901～1995）高度评价说，这是一个“登峰造极地步的大发明”，他



图 2-2　伽利略

用的算法和得到的数据，我们现在还是照用不误。

从这个例子可以看出，音乐也离不开数学。事实上，正如伽利略（图 2-2）那句著名的格言所说，“数学是科学的语言”。而比他更早的阿纳托利斯（Anatolius）则说，虽然数学是从点和线开始的，但数学很快就把自己扩展到整个宇宙，使得他包罗万象。难怪有人说，如果一门科学离开了数学，那么它就还不成熟。

2.2 谁也无法“逃遁”——噪声和对数

当今世界各行各业高度发达，然而各种污染也十分严重，特别是近年人们日益关注的噪声污染——它严重地影响着人们的工作效率和身心健康。

可是你知道吗？噪声和对数也有着密切的关系呢!

为声学研究的需要，迫使科学家们研究能够准确地量度声音响度的方法。

科学家们终于初步成功了，这种响度的单位就是“级差”的单位“贝尔”(Bl)——它的命名来自发明电话的、出生在苏格兰的美国发明家贝尔（Alexander Graham Bell，1847～1922)。这样，1 贝尔、2 贝尔、3 贝尔等等，对于我们的耳朵的响度感觉就成为

一个等差级数。这些声音的“强度”——准确地说是能量，就成了一个公比为10的等比级数。也就是说，如果两个声音的响度相差1贝尔，则它们的强度就是1和10之比。可以看出，声音的响度用贝尔来表示，正好是它的强度的常用对数。

你看，对数在研究声音的时候又大显神通了。

有的时候，人们嫌Bl这个单位太大，就用它的1/10作为实用单位，叫“分贝”（dB）。

下面，用几个实际例子来说明。

高声说话的响度为6.5dB，是树叶的沙沙声的响度1dB的6.5倍，可以算出前者的强度比后者大$10^{(6.5-1)}$倍≈316 000倍。

尼亚加拉大瀑布最大的噪声是90dB，而锤子打在钢板上的声音可以达到110dB，两者响度相差20dB，而强度之比则是$1:10^{(110-90)}=1:10^{20}$！

那么，为什么我们的耳朵的响度感觉不是与声音的强度成正比，而是与声音的强度的常用对数成正比呢？

原来，这是基于19世纪德国心理－物理学家韦伯（Ernst Heinrich Weber，1795～1878）和他的表弟及学生费西纳（Gustav Theodor Fechner，1801～1887）的“心理物理学理论”的“同一律”。同一律是一个实验理论，它是说人的一切感觉，包括听觉、视觉、肤觉（含痛、痒、触、温度）、味觉、嗅觉、电击觉等，都遵从感觉不是与对应物理量的强度成正比，而是与对应物理量的强度的常用对数成正比的规律。

不过到了20世纪，美国心理学家史蒂文斯（S.S.Stevens）却用“幂定律”对同一律提出了挑战，至今仍胜负未分。

当然，对数不仅用来描绘噪声，在早期的家用电器中有

控制音量、音调或亮度的旋钮，这些旋钮控制的是电器内部的电位器，而这些电位器的电阻值通常是按对数规律设计、制造的，选择电台或电视台的旋钮所控制的可变电容器也是如此。

2.3 规律缘起古希腊——星星亮度和对数

“天街夜色凉如水，卧看牵牛织女星。”当我们面对繁星满天的夜空，“巡天遥看一千河”的时候，就会发现天上的星星——这里包括恒星和其他天体的“物理亮度”（下面简称“亮度”）各不相同。那么我们的眼睛对亮度的感觉与光的强度——物理学上称为“光强”，又是什么关系呢?

1850（一说 1856）年，英国天文学家普森开始定量解决这个问题，并给出了正确的答案。他用对数标度把星星的亮度分成 6 个等差级数的等级，称为“目视星等”（简称“视星等”或“星等”），通常在星等数字右上角标用小写字母“m”来表示，例如北极星为 2^m，轩辕十四星为 1.35^m。1 等星（1^m）最亮，2 等星（2^m）暗一些，……，6 等星（6^m）最暗。

对亮于 1^m 的星，依次延伸为 0^m，-1^m，-2^m，…，例如全天最亮的恒星——天狼星为 -1.45^m，金星在最亮时为 -4.4^m。

对暗于 6^m 的星，则依次延伸为 7^m，8^m，9^m，…，例如肉眼看不见的巴纳德星为 10^m。

普森指出，在地球上看亮度相差 2.512 倍的两颗星，我们用肉眼看只感觉相差 1 等。例如，在地球上看 1 等星只比 3 等星亮两个等级，但它们的亮度之比却是 $1:2.512^{(3-1)}\approx 1:6.3$。

那么这个 2.512 又是怎么来的呢，它与对数又有什么瓜

葛呢?

原来,“星等”就是星星的亮度的负对数,而这个对数的底是 $\sqrt[5]{100}\approx 2.512$。

下面,我们用这个方法计算一个实例。我们用光度计测得一颗星的亮度是 1 等星的 1/40,那么,它的“星等”就是

$$1+[-\log_{\sqrt[5]{100}}(1/40)]\text{ 等}\approx 5\text{ 等}$$

由此还可以看出,“星等”有可能出现前面提到的小数。又如满月时月光的亮度是 -12.6 等,而太阳最亮时是 -26.8 等。

当然,最早把星星分成 6 等的并不是普森,而是西方天文学的创始人、古希腊的天文学家和数学家西帕恰斯(Hipparchus,约公元前 190～前 125)。他把整个天空大约 20 颗最亮的恒星定为 1 等,把用肉眼勉强能看到的最暗的星定为 6 等。从此星星的亮度单位——“星等”被沿用下来。

17 世纪天文望远镜诞生以后,人们用它看见了更多更暗的星,于是又有了前面提到的 7, 8, 9, …, 等星。

但是,如果用人眼的感觉来估计星星的亮度,无疑会产生误差,它被称为“人差”。例如,由出生在德国的英国数学、天文学家威廉·赫谢尔(Freidrick William Herschel, 1738～1822)(图 2-3),在 1781 年 3 月 13 日发现天王星的时候,把它定为 20 等,而在 20 世纪,天文学家们则把它更准确地订正为 14 等。



图 2-3　威廉·赫谢尔

那么西帕恰斯将“星等”分成 6 个等级又有没有科学性呢?

1830年，威廉·赫谢尔的儿子、英国数学、天文学家约翰·赫谢尔（John Freidrick William Herschel，1792～1871），把这6个等级的星的亮度详细的测定了出来，结果发现1等星的亮度大体是6等星的100倍。这样，才有了普森根据约翰·赫谢尔研究成果的、用亮度相差 $\sqrt[5]{100}=2.511\,886\,4\cdots\approx 2.512$ 倍，来区分“星等”的、沿用至今的科学尺度。

可见，西帕恰斯把“星等”分成6个等级是有科学性的。

但是，上面这种不考虑星星离我们远近来比较亮度的“星等”计算法，显然对遥远的星星“有失公平”，于是科学家们又“心生一计”——采用“绝对星等”。

“绝对星等”是指距离天体10秒差距的这个距离看到的亮度，通常在星等数字右上角标大写字母“M”来表示。这里提到的秒差距（pc）和光年（l.y.）一样，都是天文学上的“大尺子”：$1\text{pc}\approx 3.26\ \text{l.y.}\approx 3.0857\cdot 10^{16}\text{m}$。

例如，太阳最亮时的“绝对星等”是 4.8^{M}，这样，视力稍差的人就看不见，因为他站在距离太阳 $3.0857\cdot 10^{17}$m 远的地方。又如，“绝对星等”最大的星——天蝎 ξ_1，比太阳亮50万倍。

对天文学家来说，“绝对星等”比“目视星等”更为重要，因为它更能反映恒星的真实发光本领，同时也是衡量恒星年龄、寿命的参数和演化进程的标志。

2.4 科学家笔下的曲线——实用的对数图

在1636年和1637年，两位法国数学家费马（Pierre de Fermat，1601～1665）（图2-4）和笛卡儿（图2-5）分别从不

同的途径发明了解析几何。数形统一的解析几何，不但是一门新的学科，也是一种变换－求解－反演的方法，给我们用“数”来研究“形”或用“形”来研究“数”提供了极大的方便。恩格斯给了它“数学的转折点”的高度评价。



图 2-4 费马

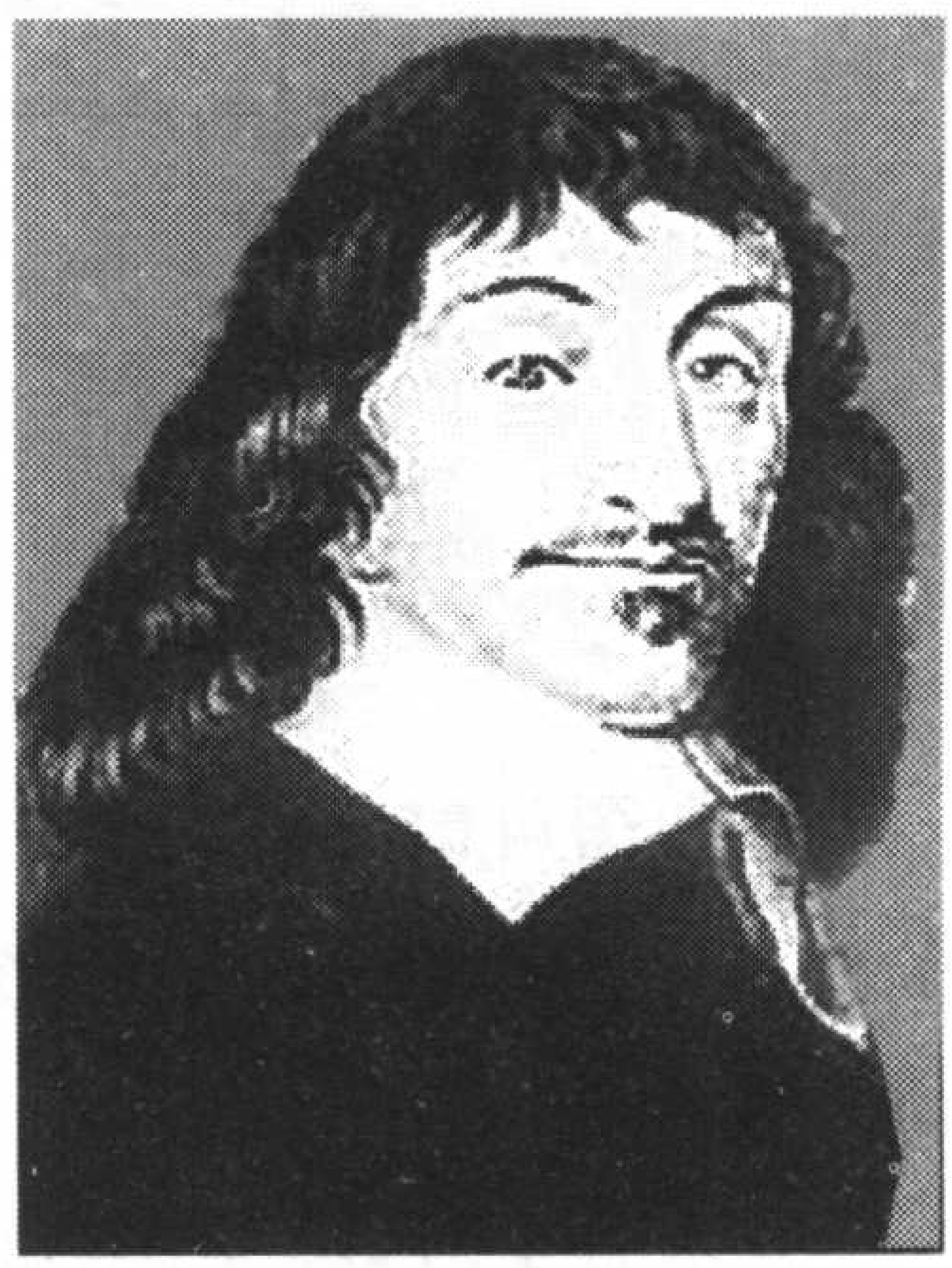


图 2-5 笛卡儿

但是，常规的笛卡儿的直角坐标系通常难以表示一些特殊的图像。例如在电子学中，要描绘三极管的放大倍数 β 随它的工作频率 f 的变化曲线时，通常选 β 为纵轴、f 为横轴。但是，此时如果要同时明显地表示出低 f 和高 f 时 β 的变化详细情形，图像就会在水平方向上拉得很长而实际上根本无法画出。

当然，有人会出主意说，把横轴 f 的单位选得大一些，不就行了嘛。可是，此时又要面临另一个尴尬：低 f 时 β 的变化情形非常不明显，以致几乎看不出这种变化。

但是如果采用频率的对数尺度 $\lg f$ 作横轴，β（或 $\lg\beta$）作纵轴，就不会有这种尴尬了。

图 2-6 就是这种“对数图”——“波特图”（Bode-diagram）。这种应用很广的图首先是由波特（Bode）发明的。

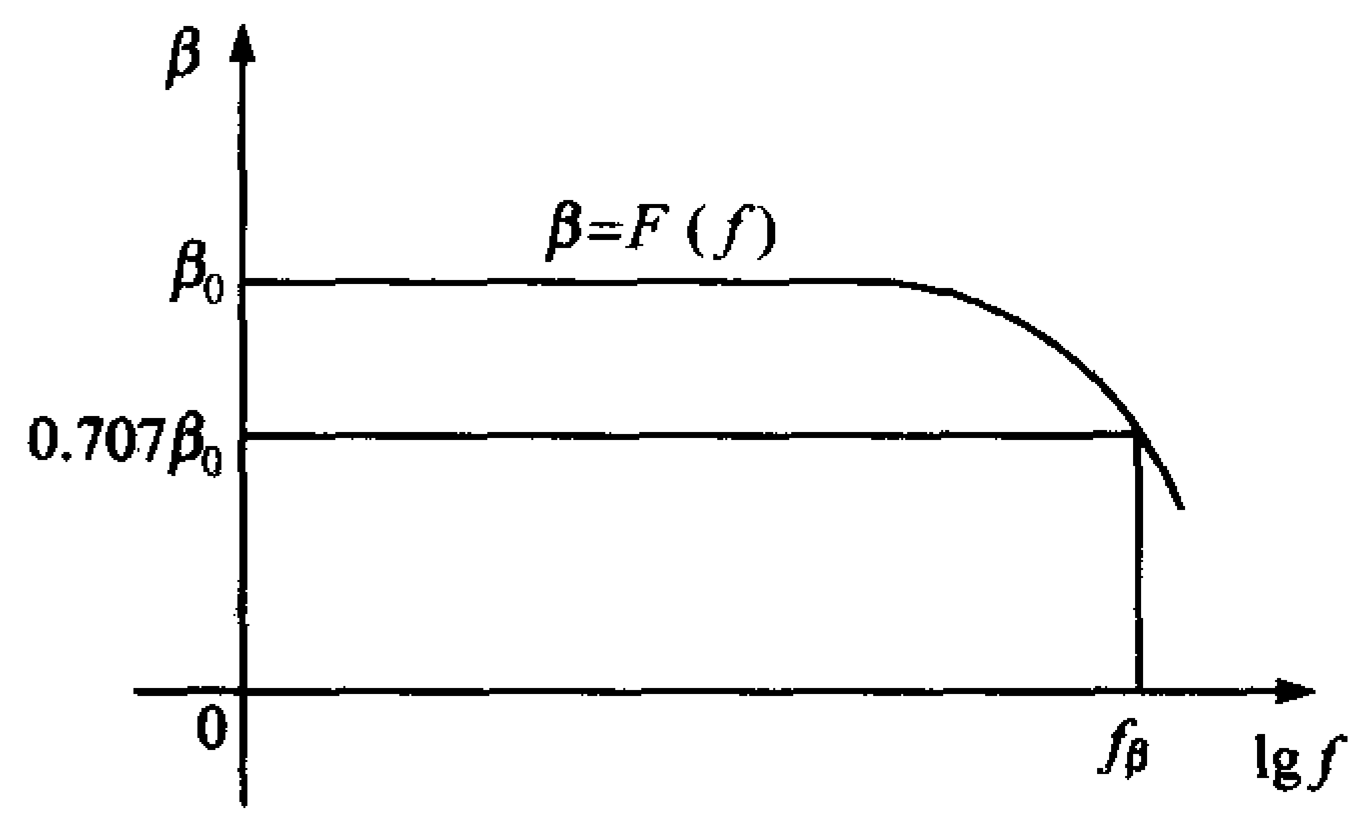


图 2-6

对数图可以分为两类，一类是只有一个轴用对数尺度，被称为“半对数图”。另一类是两个轴都用对数尺度，被称为“复对数图”。

看来有了对数，科学家们是难不倒的。

◎第三章

奇趣就在对数中——从2>3到3个2

真正的美包含在“生活就是快乐”的思想中……

——池田大作

对数的发明，不但让数学家们长上了翅膀，“延长了”他们的科学寿命，而且还给我们带来了许多乐趣。

3.1 为什么2>3——从欧拉时代的人“自摆乌龙”谈起

“证明”2>3，是对数的一个“喜剧”。

“喜剧”的“揭幕”是平淡无奇的：1/4>1/8。

接下来的“剧情”也很平常：$(1/2)^2>(1/2)^3$。

由于较大的数的对数也较大，所以把这个式子两边取常用对数之后，就有

$$\lg(1/2)^2>\lg(1/2)^3$$

或

$$2\lg(1/2)>3\lg(1/2)$$

把它的两边约去lg(1/2)，就得到 2>3。当然这个“落幕”明显是错误的——“喜剧”变成了“悲剧”。

我们相信，“小小”的你我，也能找出“喜剧”之所以变成“悲剧”的原因，并得到相应的“教训”。

但是，欧拉时代的一些人，就“不如”我们，而“自摆乌龙”了。

欧拉时代的一些人说，由于$(-x)^2=x^2$，当 $x\neq 0$ 时，$\lg(-x)^2$和 $\lg x^2$ 都有意义，所以$\lg(-x)^2=\lg x^2$。又由对数公式 $\lg N^n=n\lg N$ 可知，$\lg(-x)^2=\lg x^2$ 可变形为 $2\lg(-x)=2\lg x$，从而有 $\lg(-x)=\lg x$。于是踢进“乌龙球”：$-x=x$。欧拉问，错在哪里?

那么$\lg(-x)=\lg x$ 这个“数学怪物”是怎么得到的呢?

其实“犯规”就在$\lg(-x)^2=\lg x^2$ 变为 $2\lg(-x)=2\lg x$ 这一步上。

事实上，$\lg(-x)^2=\lg x^2$ 应变为 $2\lg|-x|=2\lg|x|$。因为我们知道，不管 x 为正数或负数，$-x$ 和 x 总有一个是负数，从而使 $\lg(-x)$ 和 $\lg x$ 总有一个是负数而“没有意义”——真数 N 必须大于 0。

所以我们在使用对数运算法则公式$\lg N^n=n\lg N$ 的时候必须注意，当 n 是偶数又不能确定 N 的正负时，必须写成$\lg N^n=n\lg|N|$，以防止$\lg(-x)=\lg x$ 而得到 $-x=x$ 这一类的悖谬。

这里出现的这类悖谬，有时被我们归入悖论（paradox）之中——虽然这类悖谬并不是严格意义上的悖论。然而悖论并

不一定是“毒草”，正如美国的尼古拉斯·法雷塔（Nicolas Falletta）在1983年发表的The Paradoxicon中所说：“一个悖论是站在真理之上而引起人们注意的真理。”因为它引起我们的深刻思考而使自身获益。

从大名鼎鼎的欧拉“不如”我们当今中学生可以看出，科学发展和科学贤哲的确走过许多“烟消日出不见人”的曲折道路！

3.2 对数的奇迹——你也能当速算大师

一场速算大师夸下海口的表演，明天就要举行了。

这位速算大师事前贴出的广告说，他能当着大家的面，在几秒钟之内把一个几十位数的几十次方根迅速算出来。当然，涉及的全体数都是整数。

如果表演失败，他会给出题的人100万元人民币！

表演前的头一天晚上，许多数学爱好者家中的灯火通明。当然，不单是为了这100万，更重要的是，要证明不可能发生这样的“奇迹”。

你，也是其中一员。

或许，你“充分准备”了几个小时——如果没有函数型这类能计算开高次方的计算器或电脑的话。或许，你只“充分准备”了几分钟——如果有这类计算设备的话。结果，你准备的题目是“计算一个35位整数的31次方根”。就用它去拿100万——你默念着进入梦乡……

表演准时举行。“请速算大师把这个35位数的31次方根心算出来！你写，我念。”自信的你第一个出题，以挑战的口

吻大声说。

“13。”还没有等你把数字念完，速算大师就给出了答案！（图 3-1）

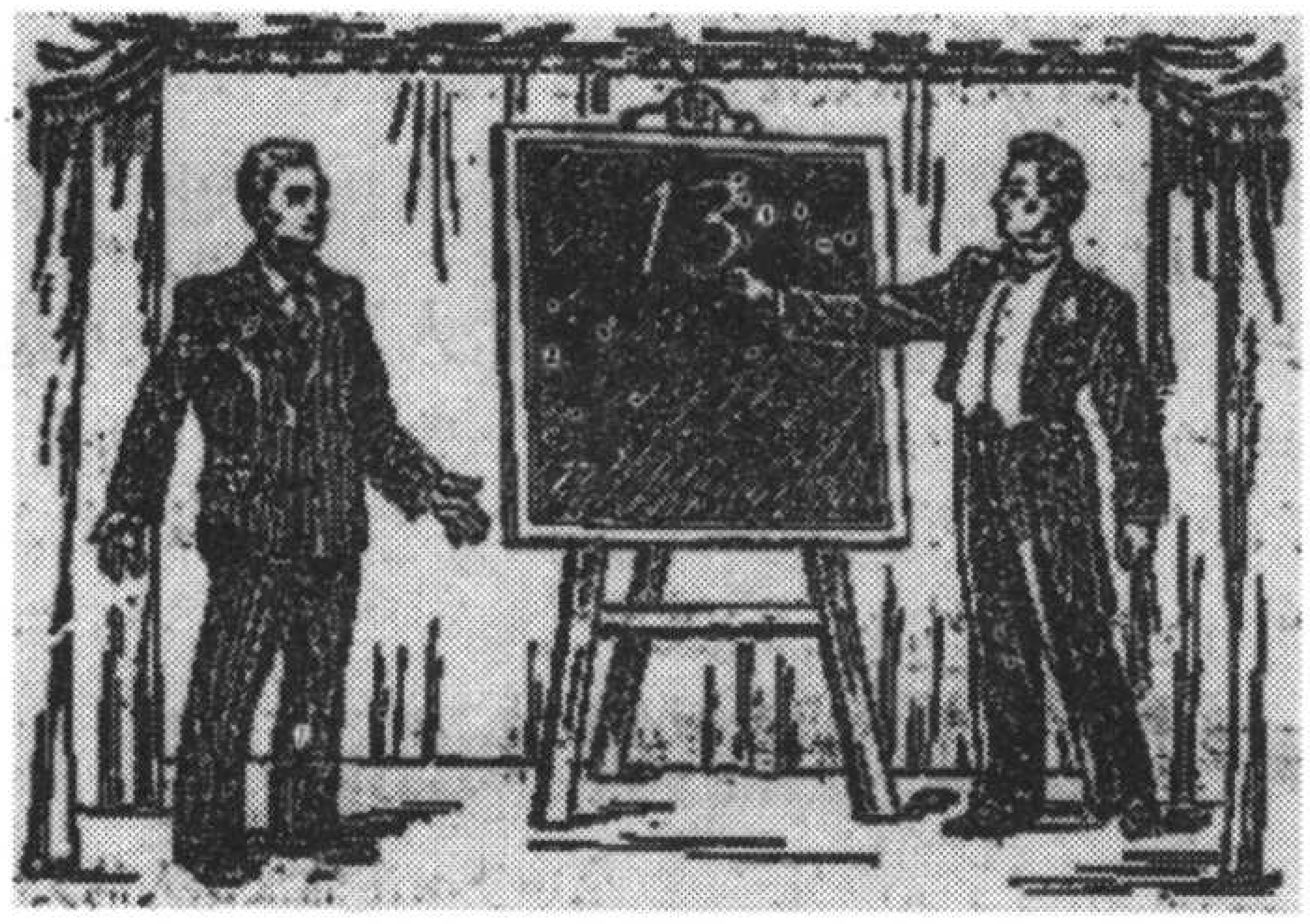


图 3-1

这时，全场惊讶不已，议论纷纷——还不知道什么数，居然就能得到答案，而且还快如迅雷闪电！

惊讶的你，呆呆地站在那里……

其实，得到这个答案没有一点玄机——只有 13 的 31 次方是 35 位数。比 13 小的数的 31 次方少于 35 位数，比 13 大的数的 31 次方多于 35 位数。

现在的问题是，速算大师怎么会事前知道这一点呢——他并不知道题目啊！

原来，速算大师的“法宝”就是对数。

前面的一二十个自然数的两位常用对数，速算大师是早已默默地牢记心中。

可能有人会说，记这一二十个自然数的两位常用对数太困难了。其实非常简单，因为我们记忆它们只需记忆几个数的两位常用对数就行了。

为什么呢，因为其中合数的常用对数等于它的素数因数的常用对数的和，因此，如果只记前 10 个自然数的常用对数，只要牢记 2，3，7 的两位常用对数分别是 0.30，0.48，0.85 就行了，其他 7 个自然数的常用对数，很容易快速推算出来。

例如，5 的常用对数就是 10 的对数 1.00 减去 2 的常用对数 0.30——0.70。

当然，如果你还要记 11～20 的常用对数，就还要记 11，13，17，19 这 4 个数的常用对数。

前 20 个（只写出“主要的”15 个）自然数的两位常用对数列于表 3-1，其中只有 7 个加粗的斜体数是要“死记硬背”的。正如前面所说，这前 20 个自然数的两位常用对数，速算大师是倒背如流的。

表 3-1

2	3	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18	1.20	1.23	1.26	1.28

好了，现在回到前面速算大师不知道 35 位数的具体数字，为什么就能很快得到答案的问题上来。请看下面这个问题：lg（35 位数字开 31 次方）= lg(34.…/31) = ?

由于 34/31 = 1.09…>1.09，所以 1.09 是lg(34.…/31)的下限。

又由于 35/31 = 1.12…<1.13，所以 1.13 是lg(34.…/31)的上限。

这样，就知道1.09<lg(34.…/31)<1.13 。

显然，表 3-1 中满足这个条件的只有 1.11，它是 13 的常用对数——这就是 13 这个答案的来源。

当然，要当这种速算大师还得有心算两位数除法的基本功。

说起速算大师，也许我们会觉得很神奇，而且离自己相当遥远。其实在掌握了一定的方法之后，我们自己就是速算

大师。

据说在 1844 年仅仅花了两个月时间就算出 201 位 π 值的德国汉堡数学家达什（John M. Zacharias（或 Zachavas）Dase, 1824～1861），“也许是前所未有的心算家”，他能在 52 分钟内心算出一个 100 位数的平方根。作为速算大师的我们和他相比也毫不逊色。

下面这个题供你练习：把一个 20 位数开 60 次方。

答案是 2。

顺便告诉你，这个 20 位数就是那个“国际象棋格子里摆麦粒”故事里的麦粒数加 1，即 $2^{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$。

那个著名的故事说，古印度发明国际象棋的宰相西萨·班·达依尔（Sissa Ben Dahir），要喜爱国际象棋的国王舍罕（Shirham）奖赏给他麦粒——从第一个棋盘格子奖 1 粒开始，其余 63 个格子依次加倍（图 3-2）。

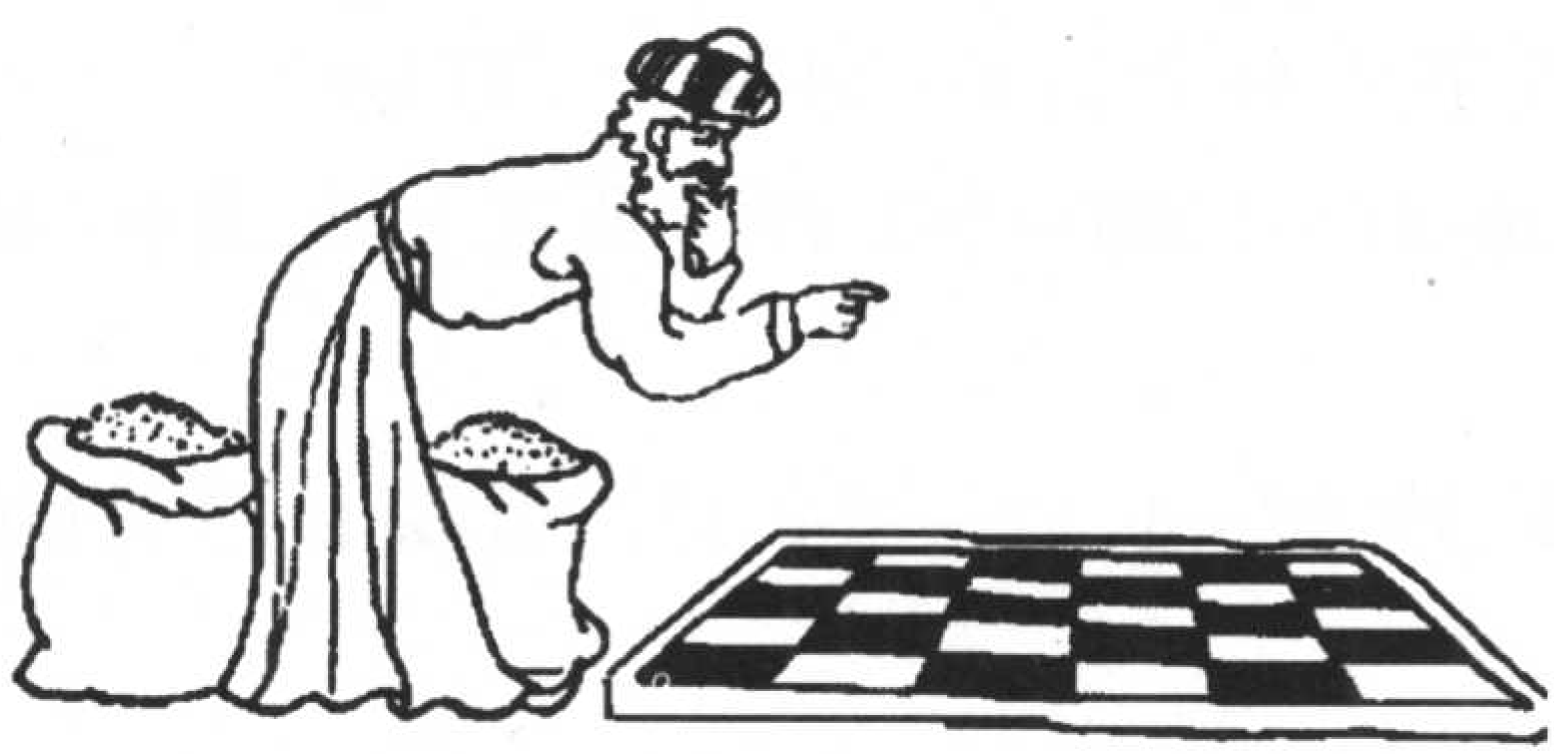


图 3-2

同时，这个 20 位数也和下面的古印度梵塔问题有关。

流传在中东地区的故事说，古印度北部恒河河畔印度教婆湿派教徒的胜地（也是婆罗门教和印度教的文化中心）——“世界中心”贝拿勒斯圣庙里，供奉着印度神主教梵天在创造世界的时候制造的 3 根黄铜底座的宝石塔针。每根宝石塔针高约 50cm，有蜜蜂的身体那么粗，其中一根穿上了 64 张上小下

大的有孔金盘。梵天要求值班的僧侣按“一次移动 1 张金盘，不准放在其他地方，不准上大下小放置”的规则，把这些金盘在 3 根针上搬来搬去（图 3-3），最终搬到另一根塔针上去——此时“世界末日”就到了。

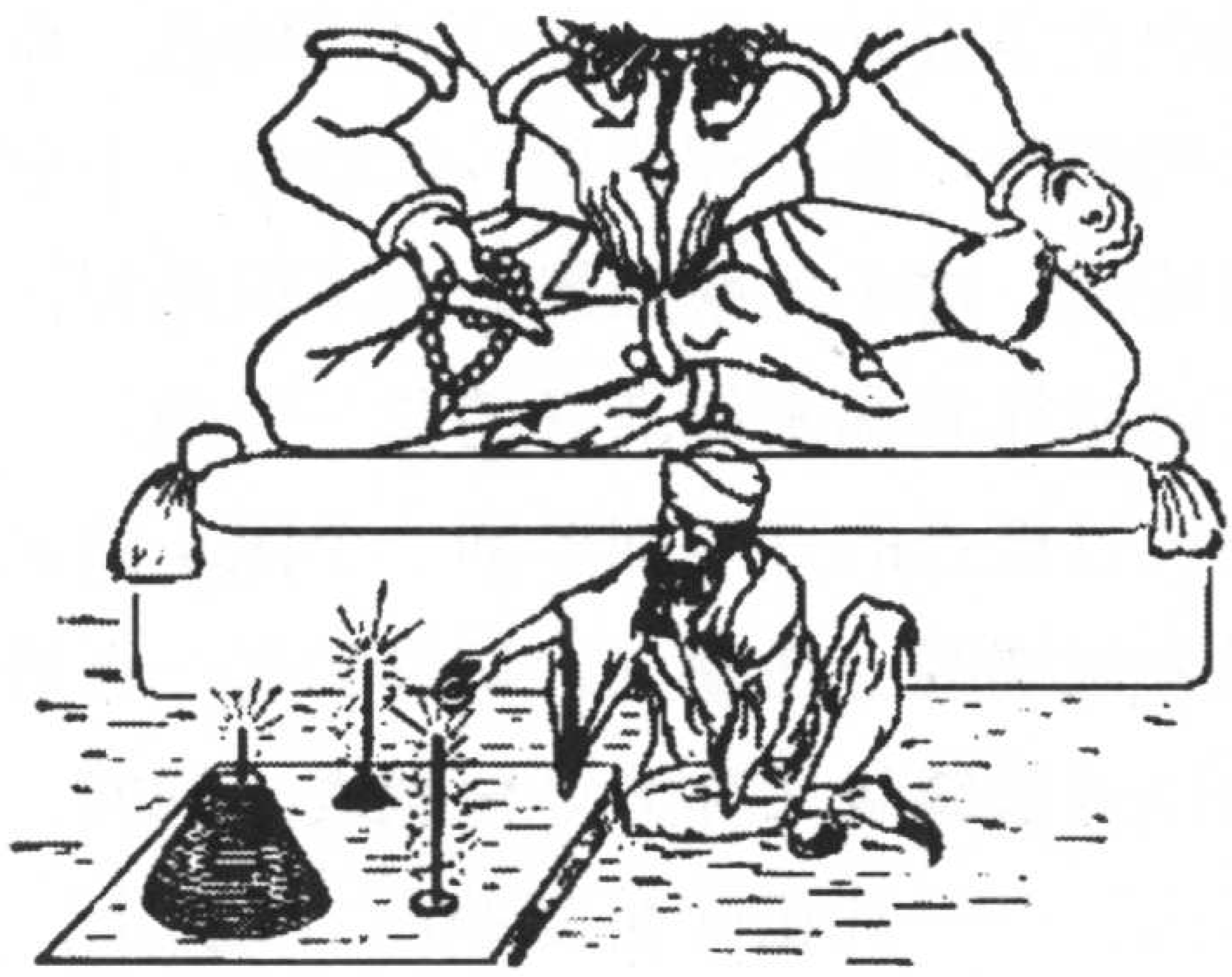


图 3-3　值班僧侣用约 5850 亿年搬金盘

这个著名的梵塔问题（Hanoi Tower Problem）又称为汉诺塔问题或河内塔问题。搬的次数加 1 也是这个 20 位数——如果 1 秒钟搬 1 张金盘，约要用 5850 亿年。

这个趣味故事的另一种版本说，针高 2m，每张金盘厚 3cm，搬完后喜马拉雅山就会变成一座金山。

据说酷爱数学的英国历史学家鲍尔（Walter Rouse Ball），首先把这个问题介绍给了数学家们。法国数学家鲁卡斯（Edouard Lucas，1842～1891）曾正确地解答了这个问题。

3.3 雕刻家也会糊涂——弄错了的对数螺线

在所有的平面几何图形中，对数螺线（logarithmic spiral）

是最优美、最奇妙的图形之一。

图 3-4 所示的对数螺线的极坐标方程是 $\rho = k\mathrm{e}^{\alpha\theta}$，其中极径 ρ 是因变量，极角 θ 是自变量。若取 $k=\alpha=1$，则对数螺线的极坐标方程可简化为 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$。

对数螺线的优美奇妙之处——或者说特点，有 3 个。

一是对数螺线每一次全程旋转，都会以一个固定的比率增加它到极点的距离；这个比率因螺线的不同而异，并决定螺线的增长率。所以螺线看起来像渐开的花一样美。

二是每条经过极点的直线都以同一个固定的角度和对数螺线相交——或者说螺线上任意点的切线和这一点的极径所成的角是定角。所以对数螺线又称为等角螺线。同时，对数螺线就成了圆的“近亲”——其相交角是 90°。事实上，圆就是一种增长率为 0 的对数螺线。而我们知道，圆也是最美的图形之一。

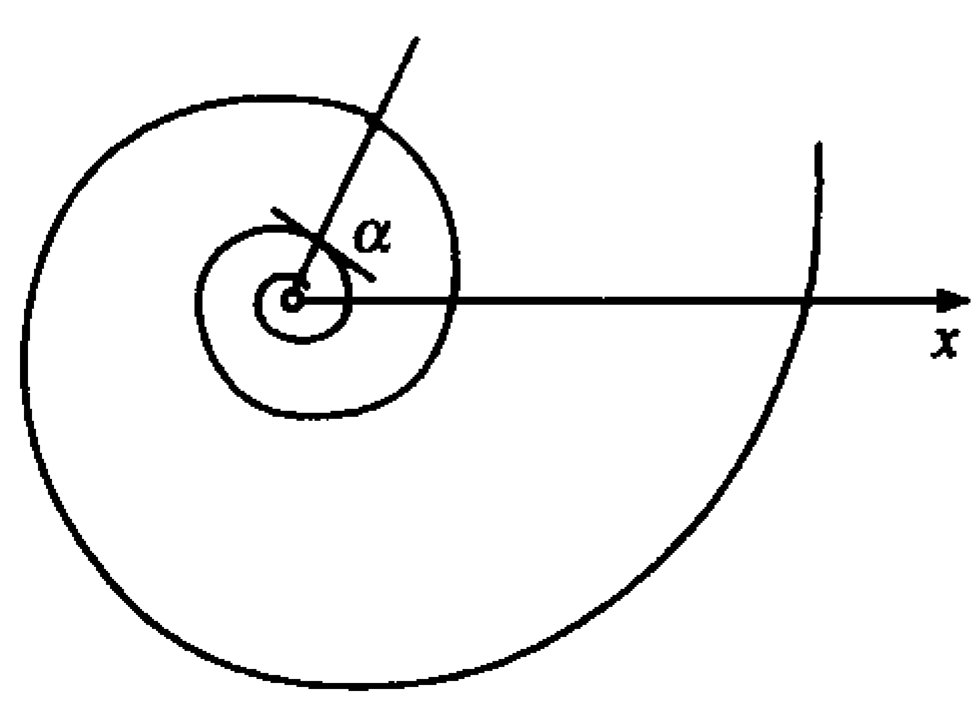


图 3-4

三是如果沿着对数螺线向内朝着极点走，就必须走无限多圈，但走的距离却是有限的！这个有趣的、似乎难以置信的事实，是伽利略的学生、意大利物理学、数学家托里拆利（Evangelista Torricelli，1608～1647）在 1645 年发现的。

对数螺线的这些奇妙之处使数学家们着迷，我们多次提到的瑞士数学家雅格布·伯努利（1654～1705）就是其中的一个，以致对数螺线又叫伯努利螺线。

雅格布·伯努利最为人们津津乐道的轶事，就是醉心于系

统的研究对数螺线。他发现了对数螺线的绝大多数特征，并称它为“spira mirabilis”（神奇的螺线）。例如，他发现对数螺线经过各种变换（例如渐伸线、渐屈线、回光线——catacaustic）之后，依然变成对数螺线。在惊叹、欣赏这种对数螺线的神奇美妙之余，他要求把它刻在他的墓碑上，并写上碑文“Eadem mutata resurgo”。

这段碑文是如此著名，以致它的中译文就有许多版本：“虽然改变了，我还是和原来一样。”“虽经沧桑，我仍将以故我出现。”“纵使变化，依然故我。”“再生乃故我。”“尽管改变，我仍将再现。”由此可见，这段一语双关的碑文，总结了对数螺线最显著的特征：它在大多数普通几何变换中的不变性。无论你伸长、缩小还是旋转它，你最后总能得到同样的螺线！就像上一段提到的那样。



图 3-5

这块墓碑是如此著名，以致在不同的文献传载中，有图 3-5 和图 3-6 两种不同的图形。

图 3-5 下部的“阿基米德螺线”（它准确的图是图 3-7）的周围，就是碑文“Eadem mutata resurgo”，只不过字母都是大写的。

不是雅格布·伯努利钟情且嘱托刻对数螺线吗？怎么这里却说是阿基米德螺线即“等速螺线”呢？原来，是粗心的雕刻家错把极坐标方程是 $\rho = \alpha\theta$（其中 α 是常数）的阿基米德螺

线，当成对数螺线刻上去了。

天哪！要是雅格布·伯努利地下有知，应当把这个由于数学“水平不高”而“张冠李戴”的雕刻家拉到地下去搞一点“数学普及”。

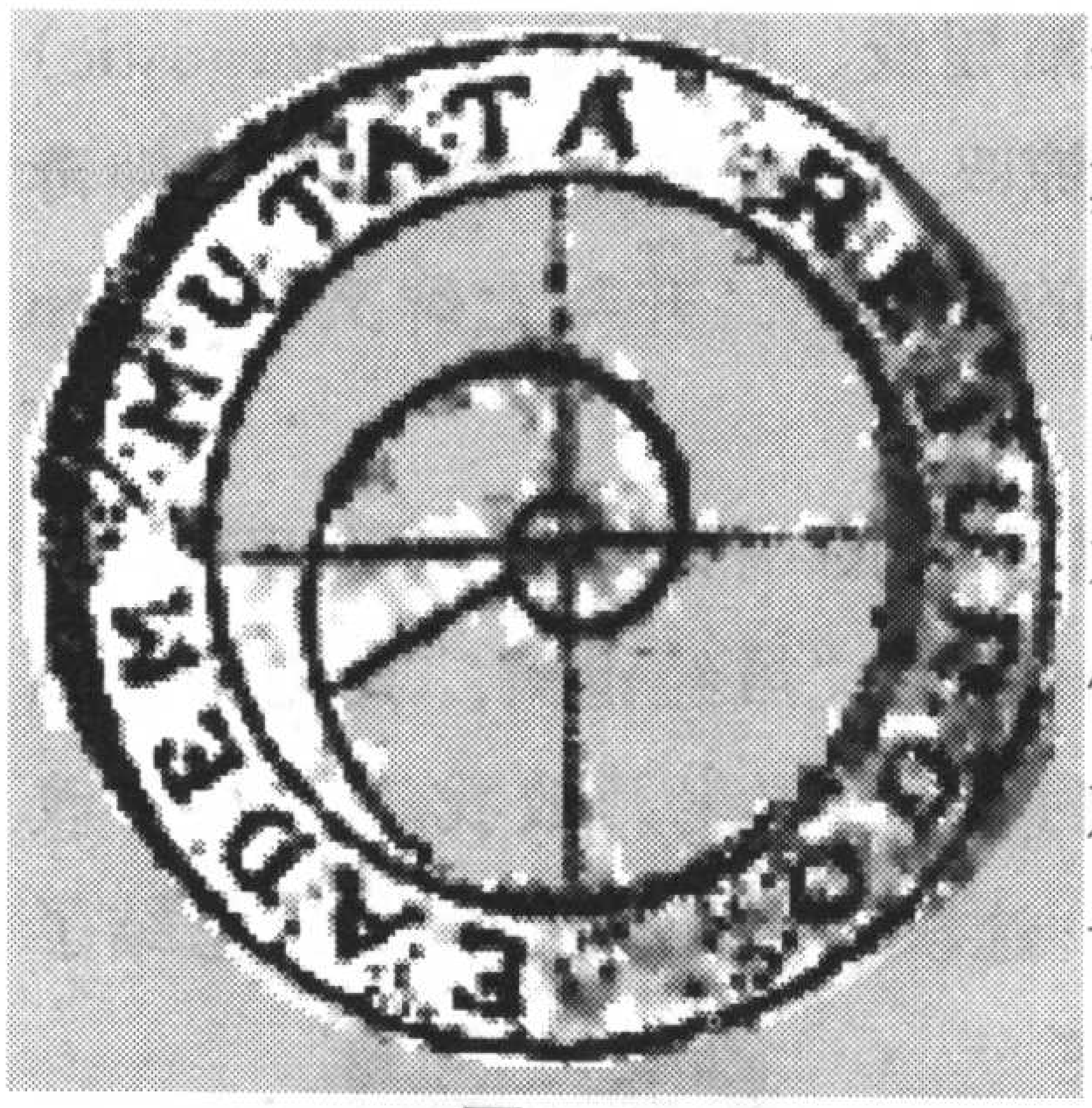


图 3-6

图 3-6 虽然可以看作是刚才说到的图 3-5 下部的放大，但两个图中的螺线明显不同。对此，本书无力统一，诚求教于读者。

在这里，我们顺便提到对数曲线。它是由 $y=\log_a x$ 确定的，和由 $y=a^x$ 确定的指数曲线没有任何区别。

3.4 狄拉克也会疏忽——3 个 2 的奇趣

1933 年，有两位科学家站在诺贝尔物理学奖的领奖台上，其中之一就是大名鼎鼎的英国物理学、数学家狄拉克（Paul Adrien Maurce Dirac，1902～1984）。他之所以有建立“狄拉克方程”等对量子物理学的卓越贡献，与他自幼才华横溢并酷爱数学有关。

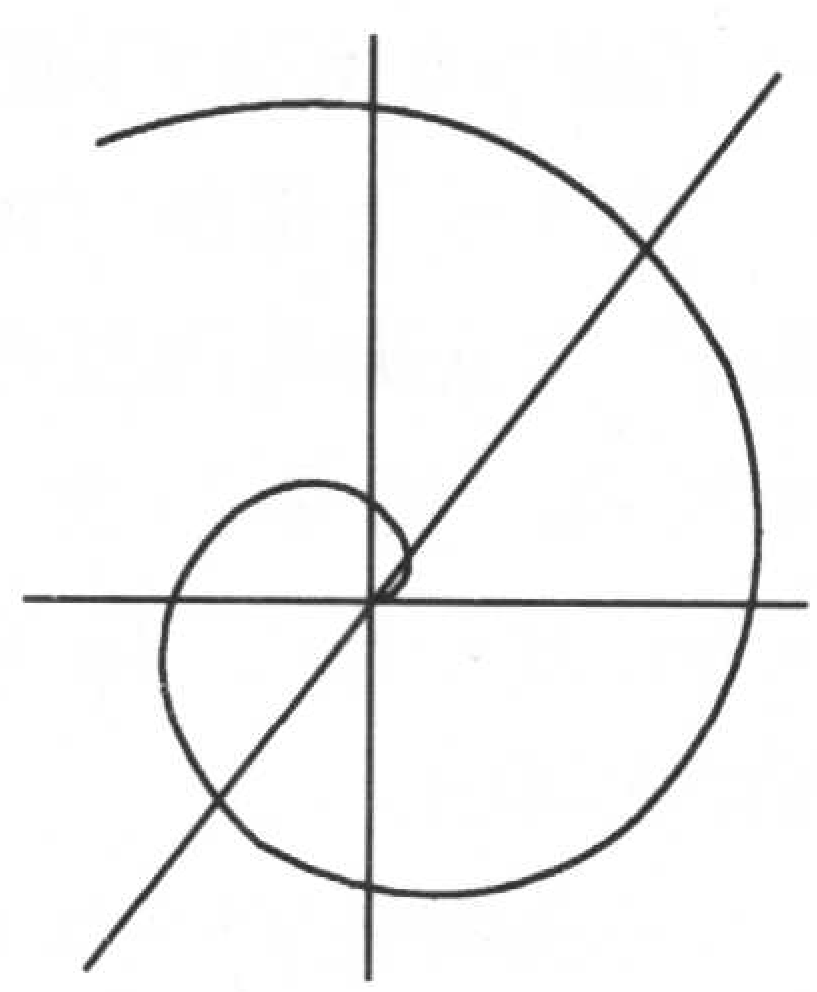


图 3-7

一次狄拉克去哥廷根大学访问，正逢校内许多出类拔萃的师生在沉湎于一道题目：只用 4 个 2 及所有可利用的

“数学符号”，诸如加、减、乘、除、乘方、开方等，将 1～100 之间的所有自然数表示出来——这里将这类问题称为“组数”问题。参加比赛的人给出了诸如 $1=\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}$，$2=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}$，$3=2^2-\frac{2}{2}$，$4=2+\frac{2}{2}\cdot 2$，$5=2^2+\frac{2}{2}$，$6=2\cdot 2^2-2$ 等答案，但没人能表示出 1～100 之间的所有的自然数。

狄拉克经过一番思索后，很快给出了只用 3 个 2 表示任何自然数 N 的通解公式

$$N=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}_{N\text{个根号}}$$

当然，狄拉克解的已经不是“用 4 个 2……”那道题了。但是，从中可以看出狄拉克的方法的确闪烁着智慧的光芒，因此而被许多报纸、书刊所传扬也就不足为奇了。

然而，我们要问地下的狄拉克先生，你当年所说的“数学符号”的含义是什么？狄拉克当然会回答：“就是除了给出的阿拉伯数字外的任何数学符号——当然不能用没有给出的阿拉伯数字。”

我们再问：可不可以用隐含阿拉伯数字的符号呢？他略加思索后会回答：“可以。”他不能回答“不可以”，因为他已使用了隐含有另一个“2”的“$\sqrt{2}$”（“$\sqrt[2]{2}$”的简写）了。

好了，既然“可以”，那我们会对狄拉克说，您的解答并不出色，我们的武器——π，e，小数点“.”、对数、三角函数、阶乘、排列、组合……多得很。

例如，我们可以不用任何阿拉伯数字，“组合”出1$(=-\cos\pi=\ln e)$、0$(=\text{tg}\pi=-\text{tg}\pi=\sin\pi=-\sin\pi)$。

小数点也很有用。例如“用 2，4，5 及数学符号组成 9”

的一种解是 $4.5\cdot2=9$。

阶乘（!）可把2以上的数“组合”到足够大。例如，$3!=6$，$(3!)!=720$。

排列、组合可将一个或两个数“组合”成新的数。例如，给出“3”，可得到 $6=P_3$；如给出“2，4”，可得 $12=A_4^2$，$6=C_4^2$ 等等。

以上不过是一些示例，事实上数学符号很多。有了它们，就可以用3个2（或4个2）组成任何自然数。例如“用3个2组成485”这个题的答案之一是：用1个“$-\cos\pi$”加上 22^2，就是485。

这时你会看到，用这种规则“组数”是没有任何意义的。那么问题出在哪里呢？出在我们从古到今的疏忽——包括狄拉克在内。用了隐含另一个2的“$\sqrt{2}$”，即承认可用隐含阿拉伯数字2或其他数字（例如π，e）的符号。

或许狄拉克会说，我们的规则就是允许用开平方号（“$\sqrt{\ }$”）的。那我们说，这个规则缺乏科学性：因为“开平方”仅仅是“开方”中的一种，只有“开方”才能与加、减、乘、除、乘方等运算并列，而“开方”中的“开平方”是不能与另外几种运算相提并论的。

对于我们的“高谈阔论”，如果狄拉克先生地下有知，当欣然露出笑颜。

3.5 高考题中的对数方程——“盈不足术”也可解

2003年上海高考数学试卷中有一道用电子计算器解对数

方程的题：方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$__（结果精确到 0.1）。

显然，由于 $0<\lg 2<1$，且 $2^3=8<18$ 和 $3^3=27>18$，所以 $2<x<3$。

现取 2 和 3 的算术平均值 2.5，就有 $2.5^3+\lg 2.5\approx 15.625+0.398=16.023$。这说明取 2.5 小了，但已经较接近要求的值了。于是取 2.6 和 2.7。由 $2.6^3+\lg 2.6\approx 17.576+0.415=17.991$ 和 $2.7^3+\lg 2.7\approx 19.683+0.431=20.114$ 可知，$x\approx 2.6$。

那么，除了这种解法外，还有没有其他解法呢？

有的。用中国古算中的“盈不足术”，就有另一种不用对数的解法。

中国古代数学名著《九章算术》中用盈不足术解的第一个题是：“今有（几个人）共买物，（每个）人出八（钱）盈（余）三（钱），（每个）人出七（钱）不足四（钱），问人数（v）、物价（u）各几何。”

设每人出 a_1 钱时盈 b_1 钱，每人出 a_2 钱时不足盈 b_2 钱，由盈不足术，就有公式

$$u=\frac{a_2b_1+a_1b_2}{a_1-a_2} \tag{3.1}$$

$$v=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2} \tag{3.2}$$

下面，我们就用（3.1）式来解 $x^3+\lg x=18$。

由于 $2^3+\lg 2-18=-9.70$（不足），而 $3^3+\lg 3-18=9.48$（盈余），所以由（3.1）式就得到

$$x=\frac{2\cdot 9.48+3\cdot 9.70}{9.48-(-9.70)}\approx 2.51$$

由前面算过的 $2.5^3 + \lg 2.5 \approx 16.023$ 和 $\lg 2.5 < 1$ 知道，2.51 显然不到要求的精度。所以应再算一次。用 $x = 2.51$ 代入原方程中，得到 $2.51^3 + \lg 2.51 - 18 \approx -1.79$（不足）。再把 -1.79（不足）和 9.48（盈余）代入（3.1）式中，就得到

$$x = \frac{2.51 \cdot 9.48 + 3 \cdot 1.79}{9.48 - (-1.79)} \approx 2.59 \approx 2.6$$

◎第四章

对数的两大宠儿——既要“常用”也要“自然”

噢，上帝，

为什么二加二等于四？

——亚历山大·蒲柏

4.1 以 2 为底的对数——神通广大应用广泛

对于二进制、电子计算机……这些名词，现代人一点也不陌生。那么，它们和对数、自然对数又有什么关系呢?

我们知道，对数的底是可以在 1 以外的正数中任意选取的，例如选 2 为底。

选 2 为底的著名例子，除了我们在 2.1 中说到的音乐中的实例外，就是贝利（D.H.Bailey）等 4 位数学家在《圆周率探索》（中译文载《数学译林》1997 年第 7 期 205～215 页）中，用 16 进制的位数作为图的横坐标的时候，就要用 4 来乘以这些 16 进制数字，才能得到等价的 2 进制数字。这里的 4，就是以 2

为底的对数——$4=\log_2 16$。

此外，以 2 为底的对数还可以用来确定与某十进制数字 n 对应的二进制数字 m 的位数 $M_m=[\log_2 n]+1$ 位（式子中的“[ ]”，是“取整”）。举例来说，十进制数字 2 的二进制数字 10 的位数是 $M_{10}=[\log_2 2]+1$ 位，即 2 位。又如，十进制数字 10 的二进制数字 1010 的位数是 $M_{1010}=[\log_2 10]+1$ 位，即 4 位。

“二进制数字”的英语是“binarydigit”，“比特”(bit 或 binit) 就是 binarydigit 的缩写 binit 以 bit 的发音的音译。比特是信息量的度量单位——每一个“0”或“1”就包含有 1 比特的信息。约 1938 年，创立经典信息论的美国数学家仙农（Claude Elwood Shannon，1916～）首先创建了比特这个名词。

有趣和鲜为人知的是，采用神通广大、应用广泛的二进制的一个原因是和 e 有关的。

可以证明，在计算技术和编码理论中，用 r 进制表示十进制的数，取 $r=e=2.718\cdots$ 效率最高，而与 e 最接近的整数是 2 和 3。再考虑到“机器的结构”，在早期机械计算机和近现代电子计算机上自然就采用二进制了。这里所说的机器的结构，对机械计算机而言，指用“0”和“1”分别代表“有孔”、“无孔”；对电子计算机而言，指用“0”和“1”分别代表电路的“开”和“关”。



图 4-1　太极八卦图

二进制是德国数学家莱布尼茨首先在 1672～1676 年之间在巴黎时明确提出来的。

有人说，莱布尼茨是受到中国古代圣典著作《易经》中伏羲氏的八卦的启发，因为《易经》中说：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。”（太

极八卦图见图 4-1)。

但是，这种说法是不符合史实的。因为从时间来看，他在 1697 年 12 月就写信给当时在中国的法国传教士白晋（中文名白进，Joachim Bouvet，1658～1730），说到了自己的二进制发明。白晋收到信后，才把二进制和《易经》的六爻对照，发现两者是一致的。

1701 年，莱布尼茨又写信给白晋，寄去了自己的二进制数表。同年 11 月，白晋才把宋代邵雍（1011～1077）的伏羲六十四卦次序图和伏羲六十四方位图这两个图寄给他。莱布尼茨对白晋提供的材料异常欣慰，发现古老的中国易图可以解释成 0～63 的二进制数表。他为从二进制数学理解了六十四卦次序图即邵雍六十四圆图（图 4-2）并发现两者“不谋而合”而欣喜若狂，高兴地说：“几千年来不能很好理解的奥秘被我理解了，应该让我加入中国国籍吧！”

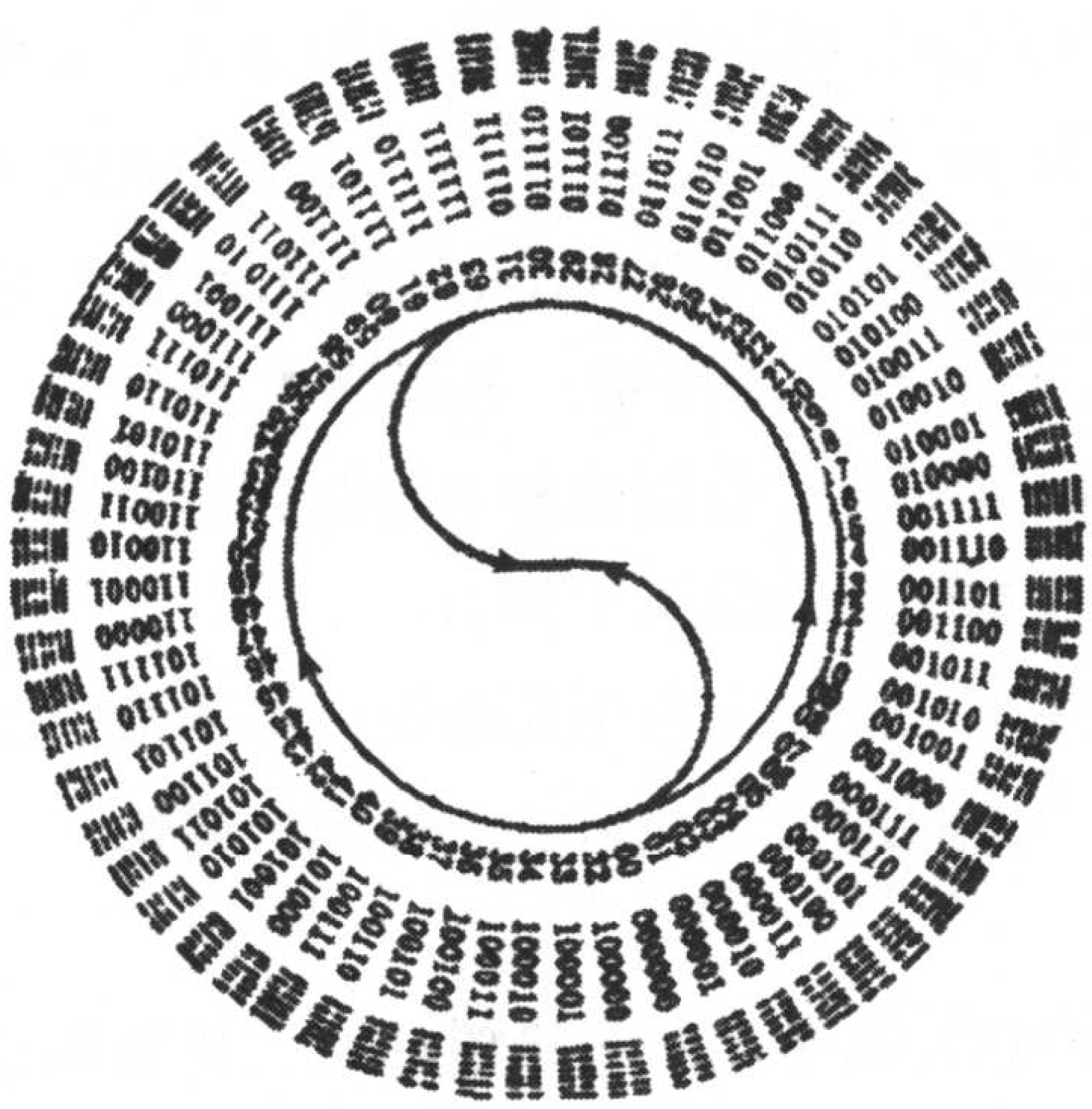


图 4-2　邵雍六十四卦圆图二进制数译图

接着，莱布尼茨把他在 1701 年就给巴黎科学院的有关二进制的论文（但要求不发表）进行了修改，写出《关于仅用 0 和 1 两个记号的二进制算术的说明，并附其应用及据此解释中国伏羲图的探讨》的论文，并在 1703 年再送巴黎科学院要求公开发表。自此，二进制就公诸于众了。

莱布尼茨对他创立的二进制十分得意还表现在他的"自我推销"上。1696 年 5 月，莱布尼茨在和鲁道夫·奥古斯特（Rudolphus Augustus）公爵的一次谈话中，介绍了二进制。公爵很感兴趣，并认为一切数都可以从 0 和 1 创造出来的观点，为基督教《圣经》的创世纪提供了依据。莱布尼茨也因此而热情大增，想用公爵的这个看法来争取人们对二进制的关注。

对于欣赏二进制的奥古斯特公爵，莱布尼茨当然要"投桃报李"。1691 年 1 月，莱布尼茨特地制作了一个象征二进制的纪念章（图 4-3 和图 4-4），作为新年礼品献给公爵。纪念章的正面（图 4-3）是公爵的像，背面（图 4-4）的设计如下：最上部刻着弧形排列的拉丁文 OMNIBUS EX NIHILO DUCENDIS SUFFICIT UNUM（从虚无创造万有，用一就够了），水面上笼罩着一片黑暗，上部光芒四射——象征创世纪的故事，中间排列着二进制数和十进制数的对照表，两侧是用二进制数进行加法和乘法的实例。

看来，莱布尼茨的这枚纪念章设计得非常完美——把他和奥古斯特的"志同道合"关系、二进制的精髓……都表现得淋漓尽致。

此外，得意的莱布尼茨还希望他的二进制能证明圆周率 π 的超越性。

不过，莱布尼茨却不必过于得意，因为在他之前已有几位

“先行者”。英国数学家哈里奥特（Thomas Harriot，1560～1621）就是其一，在他没有发表的手稿中就有二进制的记数法，只不过当时鲜为人知。



图 4-3　纪念章正面

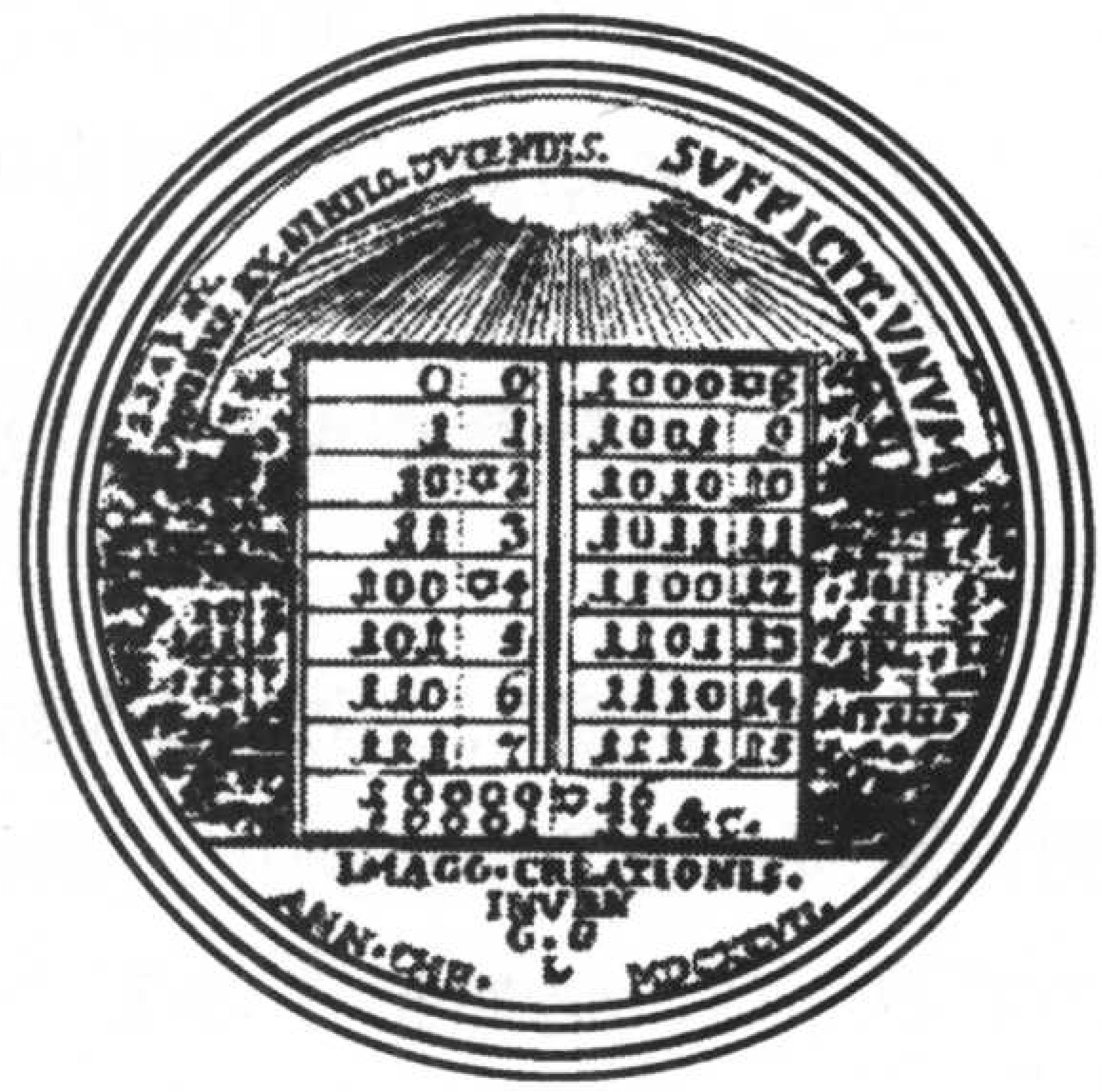


图 4-4　纪念章背面

莱布尼茨在没有看到在法国科学家帕斯卡（Blaise Pascal，1623～1662）的加法计算机的情况下，发明了自己的算术计算机（machina arithmetic），用它能进行加减乘除和开方运算。他把它带到伦敦，据说他因此而成为英国皇家学会会员。算术计算机在巴黎也受到人们热烈欢迎，他也因此而深感自豪。

莱布尼茨的“遗憾”是没有把二进制和计算机结合起来，所以那种认为他是因计算机才发明二进制的说法没有依据。不过，他的这个“遗憾”倒是他的幸运，因为在当时的条件下没有电子技术，如果他投入用二进制研制机械计算机的工作，将“出师未捷身先死，长使英雄泪满襟”!

当然，我们经常接触到的是常用对数和自然对数。为什么人们如此青睐这两种对数呢？下面我们就要给出答案。

4.2 常用对数——“爱你没商量”

我们已经知道，纳皮尔发明对数以后和布里格斯见了面。

在他们讨论如何改进对数的时候，纳皮尔建议这样来选择底：使 1 的对数为 0，使 10 的对数为 1。这样，就会使所有大于 1 的数的对数都是正数，显然这就是常用对数。布里格斯同意了这个方案。

这个“同意”，不是偶然的。1615 年，布里格斯在格雷沙姆学院所作的几次讲演中，就曾提醒人们注意，如果像纳皮尔的对数那样，仍然把 0 作为“全正弦”——sin90°的对数，那就会更加方便。而全正弦的 1/10（即 arcsin0.1）或 5°44′21″的对数则是“10 000 000”（实际是 1.000 000 0）。布里格斯说，根据他在格雷沙姆学院讲课的经验，对数的底数选 10 较好，因为这样不但能和以其他数为底的对数那样，使 1 的对数为 0、而且还会使 10 的对数为 1，这样更加便于计算。

这样，他们很快就意识到应该用 10 作对数的底，这就是常用对数——布里格斯对数的产生。于是，他们很快就开始编制以 10 为底的、更加有用的常用对数表。

不过，虽然布里格斯采用了常用对数制度——取 $\log_{10}1=0$ 和 $\log_{10}10=1$，但他始终没有具体说明他是在什么时候或者为什么采用常用对数的。

但是弗拉格却在《1～10^4 的正弦、正切和正割值以及对数值表》(Tabuloe Sinuum, Tangentium et Secantium, et Logarithmi Numerorum ab 1 ad 10^4）中，却清楚地提到了为什么要采用它。他写道：“为了更多的方便，取 1 的对数是 0，取 10 的对数是

1.000，100 的对数是 2，依此类推，”如表 4-1。

表 4-1

真数	对数
1	0.000 000
10	1.000 000
100	2.000 000
1000	3.000 000
10 000	4.000 000

这里出现‘首数’的字样。这里你要注意，对数的第一位数字称为‘首数’，它总比取对数的那个整数数字的个数少 1。例如，由于 $\log_{10}3\,567\,894$ 是 6.552 411 8，所以可推得

$$\log_{10}3.567\,894 = 0.552\,411\,8$$

$$\log_{10}35.678\,94 = 1.552\,411\,8$$

$$\log_{10}356.789\,4 = 2.552\,411\,8$$

等等。

那为什么常用对数和常用对数表“更加有用”呢？

这是因为在数值计算的时候，以 10 为底的对数表具有很大的优越性，这种优越性是因为在大多数时候，我们使用的数系是以 10 为基数的——10 进制的。

我们知道，10 的正整数幂的常用对数，等于真数里 0 的个数——例如 $\lg 1000 = 3$。10 的负整数幂的常用对数是一个负数，它的绝对值等于小数里 0 的个数（包括整数单位的一个 0）——例如 $\lg 0.001 = -3$。

根据这两个常用对数的性质，我们就能很快实现这类真数和对数之间的互求。而以其他任何数为底数是不可能实现这种

互求的。

我们还知道，正数的常用对数的首数，是真数的整数部分的位数减去 1 的一个整数。于是我们就能很快由真数来确定首数，例如 97 254 有 5 位，那它的首数必然是 4。或者，也能很快由首数来确定真数的位数，例如首数是 0，那么它的真数的位数必然是 1。类似地，正纯小数的常用对数的首数，是绝对值等于真数里第一个有效数字前面的 0 的个数（包括整数单位的一个 0）的一个负整数。

于是，我们就能很快实现这类真数的位数和首数之间的互求。而以其他数为底数是不可能实现这种互求的。

显然，由于常用对数的上述性质，就可以用它迅速地实现数字的乘、除、乘方、开方等运算。也就是说，以 10 为底的常用对数，是基于人类实践的需要而必然发展起来的。

由于常用对数的上述性质，为节约篇幅，就可以不印常用对数表中的首数，而其他以任何数为底的对数表，则不可能这样做。

这里，我们把对数的符号做一个清理。现在通常用 $\log_a$ 表示对数以 a 为底，而用 lg 或 log 表示以 10 为底的常用对数 (natural logarithm)，即 lg 或 log 是 $\log_{10}$ 的简写。ln 则表示以 e（≈2.718…）为底的自然对数（natural logarithm)，即 ln 是 $\log_e$ 的简写。但是，有时——特别在数论中，却用 log 表示自然对数，用 lg 表示常用对数。本书在没有特别声明的情形下，一律用 ln 表示自然对数，用 lg 表示常用对数。

此外，由于复数（z）的自然对数值有无穷多个，所以有时为了区别起见，常常把 $\ln z$ 写成 $\mathrm{Ln} z$，这样就有 $\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)(k \in \mathbb{Z}$——整数集)。例如，1 的模是 1，

幅角的主值是 0，因此 $\text{Ln}1=\ln 1+i\ (0+2k\pi)\ =2\ ik\pi=\ \cdots$，$-4i\pi$，$-2\ i\pi$，0，$2\ i\pi$，$4\ i\pi\cdots$。

顺便指出，Log 是对数函数的主值的符号，但是在历史上 Log 这个符号却是 1624 年开普勒简化纳皮尔的 logarithm（“对数”）用的符号，即开普勒用 Log_aN 表示 N 的对数，英国数学家奥特雷德在 1647 年也是这样用的。

意大利数学家卡瓦列里则第一次用 log 来表示对数。这样，开普勒的 Log_aN 演化为 $\log_aN$。到了 1821 年，法国数学家柯西（Augustin Louis Cauchy，1789～1857）为了区分自然对数和其他对数，别出心裁地用小写字母“l”表示自然对数，用大写字母“L”表示任意（大于 1）的底的对数。

1893 年，意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858～1932）用“$\log x$”表示以 e 为底的对数，用“$\text{Log}x$”表示以 10 为底的对数。同年斯特林厄姆用“$b\log$”表示以 b 为底的对数，而把自然对数记为“ln”，把以复数模 k 为底的对数记作“$\log_k$”。

而到了 1902 年，德国数学家斯托尔茨（Otto Stolz，1842～1905）等人，则用“$a\log.b$”表示“以 a 为底的 b 的对数”。

可以看出，对数的符号在历史上也曾多次变迁。

常用对数并不只是“好看”，而且还“中用”。除了我们在第二章中多次谈到它的实际应用以外，下面再举出一个常见的、在化学中的“酸碱度”——“pH”中的应用。

用 M 表示溶液的“摩尔浓度”，同时 M 也代表摩尔浓度的单位摩尔/升（mol/l），即 1 M = 1 mol/l。这样，我们就可以得到诸如 $[H^+]=10^{-6}M$，$[OH^-]=10^{-3}M$ 等结果。这

里，$[H^+]$ 和 $[OH^-]$ 分别表示 H^+ 和 OH^- 浓度。

但是科学家们很快就发现，这样的浓度表示方法不但写起来麻烦，而且计算起来也很不方便，于是就采用它的负常用对数——pH 来表示，即 $pH=-\lg[H^+]$。

这样 $[H^+]=10^{-6}M$ 的溶液的 $pH=-\lg 10^{-6}=6$，因此我们说“这种溶液的 pH 是 6”。

同理，$[OH^-]=10^{-3}M$ 的溶液的 $[H^+]=10^{-14}/10^{-3}=10^{-11}$，它的 $pH=-\lg 10^{-11}=11$，因此我们说“这种溶液的 pH 是 11”。这里的 $10^{-14}M$ 是纯水的“离子积”，即 $[H^+]\cdot[OH^-]=10^{-7}\cdot 10^{-7}M$。

当然，纯水的 pH=7，此时溶液呈中性，而溶液的 pH<7 时呈酸性，pH>7 时呈碱性。

看来，科学家们喜欢常用对数的确是“爱你没商量”。

4.3 自然对数——不只是大自然的选择

为什么数学家们要用 e 作对数的底？以 e 为底的对数为什么叫自然对数？这是两个有趣的问题。

我们知道，自然界的一切事物都有一定的因果关系。数学和其他自然学科一样，它的发生、发展和成熟，归根结底决定于人类各种活动的需要。

在 17 世纪中叶，数学家们在科学活动中，发现了双曲线下的面积和自然对数之间竟有如此奇妙的关系 $\int_0^x \frac{dx}{x}=\ln|x|$ 之后，人们就逐渐了解到，很多重要的函数、极限、微分和积分……都与自然对数有密切的关系。换句话说，用 e 作对数的底不是数学家们对 e 有特别的偏爱，而是一些“对数运

算”的必然结果。

下面，我们用对数函数 $y=\log_a x$（这里 a 是不等于 1 的正数）求导数来说明这一点：

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x} \\ &= \frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x} \end{aligned}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$x/\Delta x\to\infty$，由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}=\mathrm{e}$，就有

$$y'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$$

用换底公式的一种形式 $\log_a\mathrm{e}=\dfrac{\log_e \mathrm{e}}{\log_e a}$——它更一般的形式是 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$，把上式中的 $\log_a\mathrm{e}$ 变成 $\dfrac{1}{\ln a}$，就得到 $y'=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$。

显然，如果不用 e 做底，而是以另一个数（例如 b）做底的话，就会出现 $y'=\dfrac{1}{x}\dfrac{\log_b\mathrm{e}}{\log_b a}$ 这种比 $y'=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$ 更复杂的形式，这是数学家们不愿意看到的。

上面，我们从求一个一般对数函数 $y=\log_a x$（这里 a 是不等于 1 的正数）的导数出发，发现只有用 e 为底结果才会简洁，而用其他数做底，形式就会复杂些。由此可以看出，是

“自然”选择了 e 做自然对数的底，数学家们不过是“发现者”、“执行人”罢了。

这就是数学家们为什么要用 e 作对数的底的原因——回答了前面那两个问题中的第一个。

前面我们说过，在 1616 年和 1619 年，S. 赖特和约翰·斯皮德尔都分别发表了“第一个自然对数表”，但此时用 e 做底编对数表是“自然”的，而不是“自觉”的。

为什么是“自然”而不是“自觉”的呢？这是为了加快制表的速度。那为什么用 e 做底可以加快制表的速度呢？我们将在 4.4 中回答。

英国数学家奥特雷德是自然对数的发明者——当然，正如前面所说，他用的符号是“log”，此后人们才开始自觉地用 e 做底。也许由于纳皮尔对数的底是 1/e，或者为了纪念他发明了对数，所以不少文献也把自然对数称为“纳皮尔对数”(Napierian logarithm)。

下面，我们来回答前面那两个问题中的第二个。

如果设前面的 $y=\log_a x$ 中的 $a=\mathrm{e}$，$y=\log_a x$ 就变为 $y=\log_\mathrm{e} x$，很显然 $y'=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln \mathrm{e}}=\frac{1}{x}$。这也就是说，如果 $y=\ln x$，就有 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 的必然结果，而且只有 $\ln x$ 的导数才是 $\frac{1}{x}$，因为代数函数 x^n 求导不可能得到 $\frac{1}{x}$ 的形式。这就是说，代数函数 x^n 不可能得到微分为 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的形式。当然，也可以把 $y'=\frac{1}{x}$ 写成微分的形式 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{x}$。

积分是微分的逆运算，于是有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

这个式子就意味着，一个分式的分子是分母的微分，这个分式的积分就是分母以 e 为底的对数。也就是说，只要形状是 $\int \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)} = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}$，那么 $\int \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$ ——必然以 e 为底。当然，我们也可以写成一种简单的定积分的形式

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$$

反映自然界的现象有种种函数关系，而要确立变量之间的函数关系，往往又要确立函数的导数或微分的关系式——微分方程。从而通过求解这种微分方程，得出要求的函数关系。如果在求解的微分方程中存在 $\int \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}$ 的项，那么显然积分以后就必然出现以 e 为底的对数。而且，反映自然界规律的函数关系，如果是以指数形式或者对数形式出现的话，必定是、而且只能是以 e 为底的，而不会有其他正数为底的指数或对数出现——当然，不包括一些不严格的经验公式。

正因为如此，以 e 为底的对数叫“自然对数”(natural logarithm) ——反映“自然规律”的对数。

总之，取 e 做对数的底，并不是某个或某些数学家的心血来潮，而是微积分学运算的必然结果。又因为反映自然规律的指数形式或者对数形式的函数关系，必定是、而且只能是以 e 为底的，所以选 e 做底的对数叫自然对数。

由此可以看出，选 e 做自然对数的底，和因为实践的需要选 10 做常用对数的底，有一些不同。

当然，不只是大自然要选择e做对数的底，有时科学家们也要有意选择e做对数的底。最典型的例子是，在长距离通讯（例如光纤通讯）中，有时觉得级差的“单位”用贝尔（B）大了些，而用分贝（dB）又小了些，就用“奈培”（Np）做级差的“单位”。

Np就是以e做底的级差数乘以1/2，它是以纳皮尔（Napier）的姓氏来命名的。1Np≈8.686 dB，或者1dB≈0.115Np。

下面，我们说明这8.686和0.115的来历。

设两个物理量分别是A_2和A_1，那么dB和Np的换算因子就是

$$\frac{10\lg\frac{A_2}{A_1}}{\frac{1}{2}\ln\frac{A_2}{A_1}}=\frac{20\lg\frac{A_2}{A_1}}{\ln\frac{A_2}{A_1}}\approx\frac{20\cdot 0.4343\ln\frac{A_2}{A_1}}{\ln\frac{A_2}{A_1}}=8.686$$

式子中的0.4343由lge得来，而Np和dB的换算因子就是1/8.686≈0.115。

当然，Np现在已经不是中国的法定计量单位了。

4.4 e的又一用武之地——编造对数表

有的读者可能会问，为什么历史上像纳皮尔、布里格斯等许多才华横溢、醉心数学的英雄，在编造对数表的时候，都用了许多年的时间，有的还“未捷身先死”而“泪满襟”呢？

原来，当初不但说不上我们现在俯拾皆是的袖珍电子计算器、电子计算机，而且还没有先进的计算方法或公式，他们只能用最原始的手工计算——后来才有机械计算机计算，并用初

等数学的方法编制这些数据庞大、枯燥无味的对数表。举例来说，一个人用笔算，仅仅求出 5 的常用对数，就要完成 22 次开方运算！下面，我们用编制常用对数表的过程加以说明。

以 10 为底的时候，根据指数与自然数的幂造出来的常用对数表，只能给出整数 1，10，100，……的对数，对于它们之间的数的常用对数，应该把它们的几何平均值（即等比数列的项）与常用对数的算术平均值（即等差数列的项）相对应，由此可以推知，为了求出 5 的 14 位常用对数，当年布里格斯是从 1 和 10 的常用对数出发，进行了如表 4-2 所表示的运算的。

表 4-2

做开方和求算术平均的次数	数 n	数 n 的对数
	A=1	A′=0.000 000 000 000 00
	B=10	B′=1.000 000 000 000 00
1	C= $\sqrt{AB}$= 3.162 277	C′=（A′+B′）/2= 0.500 000 000 000 00
2	D= $\sqrt{BC}$=5.623 413	D′=（B′+C′）/2= 0.750 000 000 000 00
3	E= $\sqrt{CD}$=4.216 904	E′=（C′+D′）/2= 0.625 000 000 000 00
…	…	…
22	X= $\sqrt{VW}$=5.000 000	X′=（V′+W′）/2= 0.698 970 000 000 00

从这个表可以看出，要求得 5.000 000 的 14 位常用对数 0.698 970 000 000 00，就得用“手工”做开方、加法、除法各 22 次！

布里格斯在他 1624 年的《对数》一书中，详尽地给出了

他的方法——和前面的方法本质上一样。这个方法就是把 10（对数是 1）不断开平方，因而把前一个平方根的对数除以 2，就得到后一个外平方根的对数（例如表 4-3）。

表 4-3

真数	对数
10	1
$\sqrt{10}=3.162\ 277$	0.5
$\sqrt[4]{10}=1.778\ 279$	0.25
$\sqrt[8]{10}=1.333\ 521$	0.125
$\sqrt[16]{10}=1.154\ 781$	0.0625
…	…

这个工作的艰巨也是可想而知的，要不断开平方 54 次，并把它们计算到 30 位小数。

写到这里，我们不由得对这些具有远见卓识、能持之以恒的先贤们充满由衷的敬意。要知道这是一个不一定能产生“短平快”“经济效益”的工作啊！

不过，这种“原始”的计算方法，仅仅过了半个世纪就开始了改进。

1667 年，英国数学家詹姆斯·格雷戈里（James Gregory，1638～1675），发表了《论圆和双曲线的求积》（Vera Circuli et Hyperboloe Quadratura），把对数的值与位于等边双曲线和它的渐近线之间的面积进行比较，吹响了这种改进的号角。

一年以后的 1668 年，一生中大都在英国度过的德国数学、天文学家尼古拉斯·麦卡托（Nicholas Mercator，1620～1687），发表了《对数技术，或正确、方便的编造对数表的新方法》

(Logarithmotechnia sive Methodus Construendi Logarithmos, Nova, Accurata et Facilis) 一书。书中把对数分解为级数，大大简化了对数表的编制工作。他的方法是把 $y=1/(1+x)$ 展开为无穷级数 $y=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$，从而由沃利斯的双曲线下求积法推出了

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\quad(-1<x\leqslant 1)$$

当然，这个式子也可以由泰勒展开式得到。

这里提到的（Brook Taylor，1685～1731）是一位英国数学家，他以微积分学中将函数展开成无穷级数的泰勒定理而闻名于世。著名的泰勒定理在几乎每一本微积分教科书上都可以找到，并在许多数学分支中都有广泛的应用——例如我们在7.4 中将提到用它近似计算 e 值。

不过大名鼎鼎的莱布尼茨认为，展开这个级数还有一位对麦卡托说“莫道君行早”的“早行人”——荷兰数学家赫德（John Hudde，1628 或 1633～1704）。他在麦卡托之前就把 $\ln(1+x)$ 展开成级数，并先于牛顿发明了内插法。



图 4-5　李善兰

在把对数展开成幂级数的研究中，中国数学家也做出了重要贡献。1845 年，清代数学家李善兰（1811～1882）（图 4-5）出版了《对数探源》一书，在这本书的第二卷中，他就指出对数可以用他发明的“尖锥术”中的诸“尖锥”的合积来表示，对数函数可以用幂

级数来展开。

当然，除了用先进方法计算对数以外，还有一条快速编制对数表的途径，那就是把对数的底变一变，变得使对数易于计算。

那么，选什么数为底呢？

我们先来看表 4-4。

从这个表可以看出，以 10 为底来编制对数表，哪怕是只精确到万分位，也会遇到把 10，100，1000，……这些数开 10 000次方的困难。

表 4-4

以 10 为底的常用对数 $\lg N$	对应的真数 N
0.0000	$10^0=1$
0.0001	$10^{0.0001}=\sqrt[10000]{10}$
0.0002	$10^{0.0001}=\sqrt[10000]{100}$
…	…

但是，如果采用某个常数的 10 000 次幂为底，就可以避免制表时开方的困难。下面，我们来说明这一点。

表 4-5 是以 $2^{10\,000}$为底的情形。

从表 4-5 可以看出，以 $2^{10\,000}$为底就避免了开方的困难。

表 4-5

以 $a=2^{10\,000}$为底的对数 $\log_a N$	对应的真数 N
0.0000	$(2^{10\,000})^{0.0000}=1$
0.0001	$(2^{10\,000})^{0.0001}=2$
0.0002	$(2^{10\,000})^{0.0002}=2^2=4$
0.0003	$(2^{10\,000})^{0.0003}=2^3=8$
…	…

但是以 $2^{10\,000}$为底还是不能解决根本问题，这又是什么原因呢？

原来，如果底很大，则相应真数的间隔也就很大，这样很多数的对数就无法获得。例如，在 $2^{10\,000}$为底的对数表中，3，5，7，……这一连串数的对数就没有。若要算出这些数的对数，又得另花工夫。

……

经过这样一番探索之后容易发现，以 $a=b^{10\,000}$为底制作四位对数表，b 越接近 1，相应的真数间隔就越小，制成的对数表也就越精确。从下面分别以 $1.1^{10\,000}$，$1.01^{10\,000}$，$1.0001^{10\,000}$为底制作的对数表的比较（表 4-6）可以明显看出这一点。

表 4-6

$\log_a N$	$a=1.1^{10\,000}$时的 N	$a=1.01^{10\,000}$时的 N	$a=1.0001^{10\,000}$时的 N
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0001	1.1000	1.0100	1.0001
0.0002	1.2100	1.0201	1.0002
0.0003	1.3310	1.0303	1.0003
0.0004	1.4641	1.0406	1.0004
…	…	…	…

事实上，比尔吉和纳皮尔在独立制作他们各自不同的对数表中，就是这样“英雄所见略同”——用形如 $a=(1+\frac{1}{n})^n$ 的数为底的。比尔吉用的底是$(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}$（这里 $n=10^4$），

非常接近 e，这不是巧合而是必然。当然，纳皮尔用的底是 $\frac{1}{e}$，但它是 $(1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$（这里 $n=10^7$）的倒数的近似值。

从上面的叙述可以看出 e 的确大显神通——极大地加快了数学家们编造对数表的速度。

世上今人胜古人，现在，我们把电子计算器一按，就能得出位数较少的数的对数，用电脑则可以计算出位数较多的数的对数，从而愉快而迅速地编造对数表了。

4.5 赫德、麦卡托、泰勒……显神通——如何编造对数表

那么，如何具体编造对数表呢？

4.4 提到的赫德、麦卡托、泰勒给了我们编造自然对数表的“法宝”

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots(-1<x\leqslant 1)$$

把“法宝”中的 x 换为 $-x$，就得到“新法宝”

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\cdots(-1\leqslant x<1)$$

用“法宝”减“新法宝”就得到

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)(|x|<1)$$

再设 $x=\frac{1}{2n+1}<1$（n 是自然数），就得到

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$$

所以

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3\ (2n+1)^3}+\frac{2}{5\ (2n+1)^5}+\frac{2}{7\ (2n+1)^7}+\cdots$$

或

$$\ln(n+1)=\ln n+\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\frac{2}{7(2n+1)^7}+\cdots$$

由这个公式就可以从 $\ln 1=0$ 开始，逐步算出所有的自然数的对数，编制自然对数表了。

例如，设 $n=1$，就可以求得 $\ln 2$

$$\begin{aligned}\ln(1+1)&=\ln 1+\frac{2}{2+1}+\frac{2}{3(2+1)^3}+\frac{2}{5(2+1)^5}+\frac{2}{7(2+1)^7}+\cdots\\&\approx 0+0.666\ 667+0.024\ 691+0.001\ 646+0.000\ 131\\&=0.693\ 135\\&\approx 0.693\ 14\end{aligned}$$

只取 0.693 14（小数点后第 5 位的误差不超过 1 个单位）的原因是，后几位是有误差的。下面对此加以说明。

取前 4 项的误差

$$\begin{aligned}R_4&=\frac{2}{9(2n+1)^9}+\frac{2}{11(2n+1)^{11}}+\frac{2}{13(2n+1)^{13}}+\frac{2}{15(2n+1)^{15}}+\cdots\\&<\frac{2}{9(2n+1)^9}+\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]\\&=\frac{2}{9(2n+1)^9}\cdot\frac{1}{1-1/(2n+1)^2}\\&=\frac{2}{9(2n+1)^9(4n^2+4n)}\\&<\frac{2}{9\cdot 3^9\cdot 8}\end{aligned}$$

$=0.000\ 001\cdots$

可见从小数点之后第 6 位起，已经有 0.000 001 的误差，所以 0.693 135 的末位靠不住，加上在逐渐循环计算的过程中，误差还会累积，所以只能取 0.693 14。当然，如果要减小这些累积误差，就应在计算时多取几位。

有了各自然数的自然对数 $\ln n$，就可以用换底公式求得各自然数的常用对数

$$\lg n=\lg n/\ln 10=\lg n/2.302\ 585\cdots=0.434\ 294\cdots\ln n$$

进而编制常用对数表了。

当然，编造自然对数表和常用对数表还有其他方法。

◎第五章

“王宫”中的漫游——数学殿堂中的 e

数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力在于各部分之间的联系。

——希尔伯特

数学是科学的“国王”，这一章，我们来看一看 e 是如何在这个“国王”的“王宫”中漫游的吧。

5.1 关系你的“钱包”——无处不在复利律

你到银行存款了吗？你知道如何存款才能有最大的收益吗？

我们暂不回答这两个问题，而是先来看一看大自然的“复利律”吧。

我们知道 $(e^x)'=e^x$，即 e^x 的导数就是它本身。而且一个函数和它的导数等于它本身的，只有 e^x。

所以，如果我们发现一个函数 y，它的导数和函数本身成正比的话，就可以断定所研究的这个函数 y 必定是以 e 为底的指数函数或对数函数；即 $dy/dx = \pm ay$，这个形式的规律就叫复利律。由它就得到 $y = ce^{\pm ax}$，其中 a，c 都是常数。如果函数的数量是增加的，则 $y = ce^{\pm ax}$ 的指数中的 ± 取正；如果函数的数量是减少的，则指数中的“±”取负。

那为什么像 $dy/dx = \pm ay$ 的形式描述的是复利律呢？下面的例子可以说明。

假设你到银行去存了 100 元，年利率为 5%，到了第一年末，就有本利共 105 元。如果以 105 元做第二年的本金，不但 100 元要产生利息，而且第一年的利息 5 元也要产生利息。

现在，把它写成一般的形式，假设 P_0 为本金，年利率为 $r\%$，那么第一年末的利息就是$\frac{Pr}{100}$，本利的和就是 $P_0 + \frac{Pr}{100}$。再用 $P_0 + \frac{Pr}{100}$作为第二年的本金，并用 P_1 表示，就有 $P_1 = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)$。在第二年末，就有 $P_2 = P_1\left(1 + \frac{r}{100}\right) = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$。

这样，一年又一年继续下去，本金年年增加，利息也岁岁增多。到了第 n 年末，就有 $P_n = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$。例如，本金 100 元，年利率为 5%，利息每年加入到本金——即年复利率 5%，那么 10 年后的本利就有 $P_{10} = 100\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10}$。不难算得 $P_{10} \approx 162.89$ 元。

上面，我们用的方法是，每一年把利息加入到本金一次，就得到 162.89 元的结果。那么，这个结果和把利息加入到本

金一次的时间长短——前面的例子是"每一年"，有没有关系呢?

现在，假设我们可以每月、每星期，甚至每天、每小时、每分钟、每秒钟、每毫秒钟……把利息加入到本金一次，看看有什么结果。

用和前面一样的方法，可以计算出如果每月把利息加入到本金一次，本利的和是

$$P_1 = P_0 \left[1 + \frac{r}{100 \times 12}\right]^{12} \tag{5.1}$$

用 (5.1) 式可算得 $P_1 = 100 \left[1 + \frac{5}{100 \times 12}\right]^{12} \approx 105.12$ 元——比 105 元多出 0.12 元。

看来，把利息加入到本金一次的时间越短，利息越多。

那么，当这个时间"无穷短"的时候，利息会无限增多吗? 如果能无限增多，我们不是可以自动成为"大款"吗? 这个问题，我们在下一节回答，这里还是回到复利律的问题来。

现在，进一步假设在这一年中，利息是每一"刹那"——每一年有 n 个"刹那"都加入到本金一次，那么 (5.1) 式中的 12 就变成了 n，就得到

$$P = P_0 \left[1 + \frac{r}{100n}\right]^n \tag{5.2}$$

为了便于计算，假设$\frac{r}{100n} = 1/m$，这就得到 $n = \frac{mr}{100}$。这样 (5.2) 式就变为

$$P = P_0 \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{r}{100}} \tag{5.3}$$

由于 $\lim\limits_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \mathrm{e}$，(5.3) 就变为 $P = P_0 \mathrm{e}^{r/100}$。这时，$n$ 年末就有

$$P = P_0 e^{\frac{nr}{100}} \tag{5.4}$$

如果设利率$\frac{r}{100}=k$，则（5.4）式就变为

$$P = P_0 e^{nk} \tag{5.5}$$

求（5.5）式的导数，就得到 $P' = kP_0e^{nk} = kP$——得到的导数和原函数本身成正比的结果，符合前面 $y = ce^{\pm ax}$ 或$\frac{dy}{dx} = \pm ay$ 的形式。

所以，凡是导数和原函数成正比的性质，都叫复利律。

当然，这里只谈到 $y = ce^{ax}$ 的情形，$y = ce^{-ax}$ 的情形——例如放射性元素的衰变，我们将在 6.2 中谈到。

5.2 你不会自成“大款”——$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 到 e 为止

我们接着上一节中的话说下去。

由（5.4）式可以算出，$P_{10} = 100e^{10\cdot 5/100} \approx 164.87$ 元——比 162.89 元多出 1.98 元。这个 1.98 元，也比 5.1 中的 0.12 元的 10 倍 1.20 元，多出 0.78 元。

由此可见，储蓄之后的利息和把利息加入到本金一次的时间长短，是有关系的。由前面一年多出 0.12 元和十年多出 1.98 元的两次“经验”可以看出，把利息加入到本金一次的时间越短，利息越多。那么，这个“经验”可靠吗？利息会无限增多吗？

首先，这个“经验”是可靠的。

为了证明“经验”可靠，显然就是要证明数列 $x_n = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 递增。

证明 $\{x_n\}$ 递增的一般方法是把 x_n 按牛顿二项式定理展开，再分析这个展开式加以证明。

在证明过程中，要用到伯努利不等式 $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ $(x>-1,\ n>1)$。用数学归纳法证明这个不等式的任务留给读者。下面，我们将用另外一种方法证明伯努利不等式。

先证明一个"基本不等式"

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} \leqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}$$

(当且仅当$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$时等号成立)。

引入函数$f(t)=\frac{(1+t)^{\alpha_1+\alpha_2}}{t^{\alpha_2}}$

(其中 $\alpha_1, \alpha_2>0, t\in(0,\infty)$)，则

$$f'(t)=\frac{\alpha_1\cdot(1+t)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{t^{\alpha_2+1}}\left(t-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

显然，当$t=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$时获得 $f(t)_{\min}$。这就是说，对任意的 $t>0$，都有 $f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\leqslant f(t)$。

现在设 $t=\frac{\beta_2}{\beta_1}$ $(\beta_1,\ \beta_2>0)$ 代入上式，就得到

$$\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\Big/\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_2}\leqslant\left(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\Big/\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_2}$$

整理后就是"基本不等式"。

注意到 $t=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$是$f(t)$唯一的极小值点，所以不等式的等号当且仅当$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\beta_1}$或$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$时成立。

有时为了使用中表述方便，"基本不等式"可变为"等价

基本不等式”

$$\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\geqslant\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}$$

下面，我们就用“等价基本不等式”证明伯努利不等式。

当 $-1<x\leqslant\frac{-1}{n}$ 时，显然伯努利不等式成立。

当 $x>\frac{-1}{n}$ 时，在“等价基本不等式”中取 $\alpha_1=n-1$，$\alpha_2=1$，$\beta_1=1-\frac{1}{n}$，$\beta_2=x+\frac{1}{n}$。因为所设的 $n>1$ 且 $x>\frac{-1}{n}$，所以所取 α_1，α_2，β_1，β_2 都是正值，则有

$$\frac{n-1}{1-\frac{1}{n}}\neq\frac{1}{x+\frac{1}{n}}$$

这样，根据“等价基本不等式”就得到

$$\left[\frac{(1-\frac{1}{n})+(x+\frac{1}{n})}{(n-1)+1}\right]^{(n-1)+1}\geqslant\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{x+\frac{1}{n}}{1}\right)^{1}$$

或整理为

$$\left(\frac{1+x}{n}\right)^{n}\geqslant\frac{1+nx}{n^{n-1}\cdot n}$$

即伯努利不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx$$

证明完毕。

如果 $x=0$，$(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 中等号成立。

下面，我们就用伯努利不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$（$x>-1$，$x\neq 0$，$n>1$）证明 $\{x_n\}$ 递增。

因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

就得到

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \tag{5.6}$$

又因为

$$\frac{1}{(n+1)^2}<1 \tag{5.7}$$

所以由（5.6）和（5.7）式就得到

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1$$

所以 $\{x_n\}$ 递增。

这样，就证明了“把利息加入到本金一次的时间越短，利息越多。”

但是，利息不会无限增多，这显然就是要证明 $\{x_n\}$ 是有上界的。

假设 5.1 中的每一“刹那”都是无穷小，即 $\{x_n\}$ 中的 $n\to\infty$，如果能证明此时 $\{x_n\}$ 存在极限，就证明了 $\{x_n\}$ 有上界，那就证明了利息不会无限增多。下面就是证明。

为了证明 $\{x_n\}$ 有上界，我们考虑另外一个数列 $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$（其中 $n=1, 2, 3, \cdots$）。

用和前面一样的方法，我们来证明 $\{y_n\}$ 递减。

因为

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \bigg/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \\
&= \frac{1}{1+1/(n+1)}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) \bigg/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \\
&\geqslant \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) \\
&= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} \\
&> 1
\end{aligned}
$$

所以 $\{y_n\}$ 递减。

而 $x_n=(1+1/n)^n<(1+1/n)^n(1+1/n)=(1+1/n)^{n+1}=y_n\leqslant y_1=4$。

由此可知，x_n 有上界。

以上是证明 $\{y_n\}$ 递减且有上界的第一种方法。

事实上，我们可以用一个实例来说明数列 x_n 的确是有上界的。

存入 100 元，利率是 100%——当然，通常不是这么高的“高利贷”。

如果每半年把利息归入本金，半年后本利共 150 元，再过半年即一年后本利共 225 元。

如果每 1/3 年把利息归入本金，一年后本利共 237.03 元。

如果每 0.1 年把利息归入本金，一年后本利共 259.37 元。

如果每 0.01 年把利息归入本金，一年后本利共 270.48 元。

如果每 0.001 年把利息归入本金，一年后本利共 271.69 元。

……

如果每无穷短的时间把利息归入本金，一年后本利共 271.82…元——不可能超过 271.83 元。

所以，你不可能将很少的本金存在银行中，企图以得利息成为大富翁的。

当然，除了上面的“数学原因”使你不可能成为大富翁以外，还有一个原因会使你只能获得很少的利息，那就是银行都有利息的“游戏规则”——不计复利。

什么是不计复利呢？以上述 100 元存一年利率 100% 为例，就是银行只会在一年以后才给我们 100 元的利息，而且不会把这 100 元的利息自动加入到我们的本金中去，使我们在第二年以 200 元计算利息，即第二年仍然用 100 元计算利息。更不会在半年时就给我们 50 元利息而且自动加入到本金中。

根据这个“游戏规则”，我们就应该在一年期满以后，把那 100 元利息取出来，连同 100 元本金一起存入，这样在两年以后我们就一共有 400 元了。

如果我们不熟悉这个“游戏规则”，在一年后没有去取出 100 元利息，然后连同 100 元本金一起存入，那么在两年以后，我们就只有 300 元。

我们在下面介绍第二种证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界的方法——用“等价基本不等式”来证。

对于任意正实数 α_1，α_2，…，α_n，β_1，β_2，…，β_n，不难用数学归纳法把“基本不等式”或“等价基本不等式”推广到一般情形，得到

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\leqslant\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot$$

$\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\alpha_n}$（“推广式”）

或

$$\left(\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \geqslant \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot$$

$\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}$（“等价推广式”）

下面就用“等价基本不等式”和“推广式”分两步更简洁地证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界。

（1）设“等价基本不等式”中的 $\alpha_1=n-1$，$\alpha_2=1$，$\beta_1=n$，$\beta_2=1$，并注意到$\frac{n-1}{n}\neq 1/1$，就有

$$\left[\frac{n+1}{(n-1)+1}\right]^{(n-1)+1} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

或整理成

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

这就证得了 $\{x_n\}$ 递增。

（2）设“推广式”中 $\alpha_1=2$，$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_n=1$，$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=1$，并注意到 $2\neq 1$，就有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{2+1+\cdots+1}{1+1+\cdots+1}\right)^{2+1+\cdots+1}<2^2=4$$

而 $1+1/n>1$，所以$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<4$。

这就证得了 $\{x_n\}$ 有上界。

综合 1 和 2 就简洁地证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界。所依据的是“单调有界原理”：“单调不减且有上界的无穷数列，必有极限。”

当然，也可以由“等价推广式”来简洁地证明 $\{x_n\}$ 递

增且有上界。

顺便指出“基本不等式”（及它的衍生式子）是很有用的不等式，从上面的一些实例可以看出，只要巧妙构思、适当选择其中的 α_i 和 β_i 就可以解决许多数学问题。

第三种证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界的方法如下：

设“等价推广式”中 $\alpha_i=1$，$\beta_i=\alpha_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$$

这就是我们熟悉的“算术平均不小于几何平均”——柯西不等式。

设这个式子中的 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=1+1/(n-1)$，$\alpha_n=1$，则有

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\leqslant\frac{1}{n}\left[(n-1)(1+\frac{1}{n-1})+1\right]\quad(n=2,3,\cdots)$$

即

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\leqslant1+\frac{1}{n}\quad(n=2,3,\cdots)$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\quad(n=2,3,\cdots)$$

由此可知 $\{x_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 递增。

再设 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=1-\frac{1}{n-1}$，$\alpha_n=1$，同样可以证明 $\{x_n\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 递增。

由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{n^2}<1$ 知 $1+\frac{1}{n}<1/(1-\frac{1}{n})$，

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\quad(n=2,3,\cdots)$$

由于 $\{x_n\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 递增，所以$\frac{1}{\{x_n\}}=1/\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 递减，因此

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}<1/\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=4$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4\ (n=2,3,\cdots)$$

这就证明了 $\{x_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 有上界。

综上所述，就证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界。

以上证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界等内容，由计惠康先生联合许依群先生，以及王勤国先生首先分别发表在 1980 年 4 期和 1982 年 4 期《数学通报》杂志上。

第四种证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界的方法来自美国学者。

这种证明方法要用不等式

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)\ b^n\ (0\leqslant a<b,\ n\text{ 是自然数})$$

这个不等式的证明如下

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}&=\frac{(b-a)\ (b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n)}{b-a}\\&=b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n\\&<b^n+b^{n-1}b+\cdots+bb^{n-1}+b^n\\&=(n+1)\ b^n\end{aligned}$$

这个不等式还可以改写为

$$b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)(b-a)b^n \quad (0\leqslant a<b,\ n \text{ 是自然数})$$

或

$$b^n[(n+1)a-nb]<a^{n+1} \quad (0\leqslant a<b,\ n \text{ 是自然数})$$

取上面的不等式中的 $a=1+\frac{1}{(n+1)}$，$b=1+\frac{1}{n}$，就有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

这就是说 $\{x_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 递减。

又取上面的不等式中的 $a=1$，$b=1+\frac{1}{(2n)}$，就有 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}<1$ 即 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<2$ 或 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4$。

又由 $\{x_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的递减性，可知 $\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4$，所以 $\{x_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 有上界。

由上可见用第四种方法证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界。

除了以上四种证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界的方法外，在 7.4 中，还将介绍第五、六两种。

顺便指出，自然现象是不间断的、连续的，它们都是把“利息”时时刻刻自动加入到“本金”中去的。例如，植物的生长——它新生长的部分都立即和母体一样再生长，这就是大自然的复利律。

5.3 数学珍宝——π 和 e 的“一家亲”

毫无疑问，π 和 e 是数学中最重要的两个数。不但如此，

它们还是如影随形的“邻居”加“亲戚”呢!

我们把 π 和 e 四舍五入取整数，发现它们都是 3。可见 3 是这对“邻居”公用的“墙”。

印度传奇数学家拉马努金（Srinivasa Aaiyangar Ramanujan, 1887～1920）发现了下面这个有趣的公式：

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\ddots}}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

在这个公式中，我们可以看到 π 和 e 是如何“亲密接触”的。

当然，π 和 e“亲密接触”不只一次。例如 $\pi^4+\pi^5\approx e^6\approx 403.4288$。这个式子的趣味和奇妙在于这种 2，3，4，5，6 的等差数列关系——这里的 2 和 3，分别是 e 和 π 各自“取整”（即 $[e]=2$，$[\pi]=3$）后得到的数。

拉马努金还发现了另一个 π 和 e“同居一室”的公式

$$\frac{1}{2}\sqrt{e\pi}=1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ddots}}}}}$$

1941 年，美国怀俄明州卡斯佩尔公司的总工程师米夫·布特勒（Miff Butler）在作品 Geomath 中，宣称发现了 π 和 e 之间的“亲密关系”，并声明他的工作是在美国发展起来的第一个基础数学原理。他还让国会议员们在此前的 1940 年 6 月 5 日把它录成会议录音带。

更有甚者，e 还投入了 π 的“怀抱”。人们发现，从 π 值的第 45 111 908 393 小数开始的数字，正好就是 e 的前 11 位数字 27 182 818 284!

π 与 e 的数字联系还不仅如此。有人在发现 π 与 e 十进制小数的第 13 位 9、第 17 位 2、第 18 位 3、第 21 位 6、第 34 位 2…都对应相同之后猜测，π 与 e 的十进制数字平均每 10 位会有 1 次雷同，这一猜测至今没有被证实或被否定。

我们还知道，数学中有著名的“五朵金花”0，1（都来自算术），i（来自代数），π（来自几何），e（来自分析学）。妙不可言的是这“五朵金花”同时绽开在一个公式——$e^{i\pi}+1=0$ 中，它发表在欧拉 1748 年的名著《无穷分析引论》中。

在这个“五朵金花公式”中，两个最著名的超越数结伴而行，实数和虚数熔于一炉，被德国数学家克莱因（Felix Klein, 1849～1925）称为“整个数学中最卓越的公式之一”，也有数学家称之为数学中“最优美的公式之一”。怪不得美国数学家卡斯纳（Edward Kasner）和纽曼（James Newman）在《数学和想象力》一书中认为：它可能是“世界上最短也是最有名的公式……无论是神秘主义者、科学家、哲学家、数学家，都能感受到它的魅力”。而以色列学者伊莱·马奥尔（Eli Maor）在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中的评价则为：“很多人认为它具有不亚于神的力量。”

那么，这个式子是怎么得来的呢?

设 $z=x+iy$（这里，$i=\sqrt{-1}$，x，y 都是实数），这样 $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$，就是 $e^z/e^x=e^{iy}$。

用牛顿幂级数展开式

$$e^x=1+x+x^2/2!\ +x^3/3!\ +\cdots+\ x^n/n!\ +\cdots$$

把 e^{iy} 展开，就得到

$$e^z/e^x = e^{iy}$$
$$= 1 + iy - y^2/2! - iy^3/3! + y^4/4! + iy^5/5! - y^6/6! - \cdots$$
$$= (1 - y^2/2! + y^4/4! - y^6/6! + \cdots)$$
$$+ i(y - y^3/3! + y^5/5! - \cdots)$$

由于 $\cos y = 1 - y^2/2! + y^4/4! - y^6/6! + \cdots$，$\sin y = y - y^3/3! + y^5/5! - \cdots$

所以

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

即

$$e^{iy} = (\cos y + i\sin y) \qquad (5.8)$$

这就是著名的“欧拉公式”。

神奇的欧拉公式被美国数学家塞路蒙·波克纳（Salomon Bocher）在《数学在科学起源中的作用》中称为“魔术般的公式”。欧拉公式的另一种证明将在 8.8 中给出。

设欧拉公式中的 $y = \pi$，就得到“欧拉关系式” $e^{i\pi} = -1$，或变为前面的样子：$e^{i\pi} + 1 = 0$。

我们还可以继续下去，同样可以得到有 e 的式子。

再设（5.8）式中的 $y = -y$，就得到

$$e^{-iy} = (\cos y - i\sin y) \qquad (5.9)$$

最后依次把（5.8）和（5.9）式相加和相减就得到同样著名而美妙的两个公式

$$\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$$
$$\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$$

这两个公式也叫欧拉公式，它们和 $e^{iy} = (\cos y + i\sin y)$ 是欧拉在 1743 年发表的。在欧拉 1748 年出版的名著《无穷分

析引论》的第 8 章中也有记载。

此外，$e^{-2i\pi}-1=0$ 这个式子更是巧妙地让 0，1，2，i，π，e 这“六大明星”同台献艺，它和盖尔丰德得到的 $e^{\pi}=i^{-2i}$、欧拉得到的 $i\ln i=-\pi/2$ 有异曲同工之妙。从中也可以看到 π 和 e 的确是“一家亲”。这里提到的盖尔丰德（Александр О сипович Гельфонд，1906～1968）是一位苏联数学家。

欧拉之前的 1714 年，牛顿的学生、英国数学家科特斯（Roger Cotes，1682～1716），在《度量的和谐》一书中，发表了本质上和（5.8）式相同、并与棣莫弗公式本质上完全一样的式子：$ix=\ln(\cos x+i\sin x)$。这个式子把实数、虚数、对数函数、三角函数有机而和谐地联系在一起了。

1722 年，法国数学家棣莫弗（Abraham De Moiver，1667～1754）在一篇笔记中，重提他在 1707 年的一篇文章中隐隐约约得到的结果，不明显地得到了著名的棣莫弗公式

$$(\cos x\pm i\sin x)^n=\cos nx\pm i\sin nx$$

不过在欧拉的《无穷分析引论》发表之后，棣莫弗公式才得到广泛的应用。欧拉把它变为 $e^{\pm ix}=(\cos x\pm i\sin x)$，由此出发，也可以得到 $e^{i\pi}+1=0$ 等式子。

关于 $e^{\pm ix}=(\cos x\pm i\sin x)$ 的一件趣事是，印度传奇数学家拉马努金在 12 岁的时候就独立推出了它。

如果设牛顿幂级数展开式中的 $x=-1$，就得到

$$1/e=1-1+1/2!\ -1/3!\ +\cdots+(-1)^{n-1}/(n-1)!\ +\cdots$$

如果把牛顿幂级数展开式中的 e 变成 a，也得到一个含 e 的常用幂级数展开式

$$a^x=1+(\ln a)x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\cdots$$

5.4 弟弟帮哥哥——e 为 π 开路立功

1761（或 1767，1768）年，德国数学家兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1278～1777）（图 5-1）向柏林科学院提交论文，初步证明 π 也是无理数。他的证明如下：



图 5-1　兰伯特

兰伯特用欧拉的方法，并从欧拉发现的

$$(\mathrm{e}-1)/2=\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{6\,+}\,\frac{1}{10\,+}\,\frac{1}{14\,+}\cdots$$

和英国数学家布龙克尔（Lord William Brouncker，1620～1684）发现的

$$4/\pi=1+\frac{1^2}{2\,+}\,\frac{3^2}{2\,+}\,\frac{5^2}{2\,+}\cdots$$

入手，先得出后人以他姓氏命名的两个连分式

$$(\mathrm{e}^x-1)/(\mathrm{e}^x+1)=\frac{1}{2/x\,+}\,\frac{1}{6/x\,+}\,\frac{1}{10/x\,+}\cdots$$

$$\tan x=\frac{1}{1/x\,-}\,\frac{1}{3/x\,-}\,\frac{1}{5/x\,-}\cdots$$

他研究这两个式子的性质之后，得到以下两个定理：

定理 1　如果 x 是 0 以外的有理数，则 $\tan x$ 必为无理数；反之，如果 $\tan x$ 是 0 以外的有理数，则 x 必为无理数。

定理 2　如果 x 是 0 以外的有理数，则 e^x 必为无理数；反之，如果 e^x 为 1 以外的有理数，则 x 必为无理数。

最后，他设 $x=\pi/4$，则 $\tan x=1$；因为 1 是有理数，所以由定理 1 知道，$\pi/4$ 必为无理数，因而 π 也必为无理数。

这里,弟弟e为哥哥π第一次开路立功——证明π是无理数。

在证明e和π是无理数之后,数学家们又向证明它们是超越数进军。

1873年,法国数学家埃尔米特(Charles Hermite, 1822～1901)用高超的技巧,初步证明了自然对数的底e是超越数。而德国数学家林德曼(Carl Lous Ferdinand Lindemann, 1852～1939)则借助于埃尔米特的方法,在1882年严格地证明了π是超越数。

这里,弟弟e为哥哥π第二次开路立功——证明π是超越数,而对于数学家们来说,这次立功“更值得赞誉”。

为什么“更值得赞誉”呢?这得从“化圆为方问题”(以下简称“化圆为方”)谈起。

在公元前5世纪前后,古希腊流行着由雅典的智人学派即哲人学派提出来的尺规作图的三个著名古典数学难题:“倍立方体”——将正方体体积加倍,“三等分角”——将任意角三等分,“化圆为方”——将圆化成等面积的正方形。

当然,在约公元前1650年,古埃及数学家艾哈麦斯(Ahmes,约公元前20世纪或前16～17世纪)抄写的莱茵特(A. Henry Rhind, 19世纪,爱尔兰古董商)纸草书中就说:“取圆直径的8/9,作为正方形的边长,就可以得到和圆等面积的正方形。”可见,此时化圆为方漫漫征程的处女航船实际上已经起锚。

但是,如果从公元前5世纪算起,这艘航船经过漫漫2000多年征程依然在汪洋大海中飘摇,没有到达目的地。

原来,数学家们在十七八世纪才发现,要解决化圆为方,就必须判定π是不是超越数。如果不是超越数,那就能用尺规作

图法作出。如果是超越数，那就不能用尺规作图法通过有限次作图作出——这是根据法国数学家伽罗瓦（Evariste Galois，1811～1832）（图 5-2）19 岁时创立的理论得出的结论。而当时判定 π 是不是超越数是一个让数学家们头痛的问题。


图 5-2　伽罗瓦

伽罗瓦创立的理论开辟了代数学的一个新领域——群论。然而，他的这些理论却没有在他生前得到承认。直到他 21 岁死于因爱情纠葛的决斗之后 14 年，才由法国数学家刘维尔（Joseph Liouville，1809～1882）整理并发表在他于 1836 年创办并担任了 40 年主编的法文刊物《纯粹与应用数学杂志》上。

那为什么化圆为方要牵涉作出超越数的问题呢？

我们知道，化圆为方就是让 $\pi R^2 = a^2$，也就是 $a=\sqrt{\pi}R$；这里 R 是已知圆的半径，a 是所求正方形的边长。从 $a=\sqrt{\pi}R$ 可以看出，问题的关键是牵涉 π，但“不幸”的是$\sqrt{\pi}$也是超越数。根据伽罗瓦的理论，用尺规作图法通过有限次作图作出超越数 π 是不可能的，因而用尺规作图法化圆为方是不可能的。

当然，1830 年还没有证明 π 是超越数，这个证明由 52 年之后的林德曼完成。

弟弟 e 帮助了哥哥 π，也帮助了为化圆为方这个难题困惑了 2000 多年的数学界，所以功不可没，“更值得赞誉”。

5.5 它们是虚数吗——e 和 i 及 π“桃园三结义”

我们提到过 $e^{i\pi}+1=0$ 和 $e^{-2i\pi}-1=e^{2i\pi}-1=0$ 这 3 个实质上相同的、含有 i，e，π“桃园三结义”的公式，它们的“变种”分别是 $e^{i\pi}=-1$ 和 $e^{-2i\pi}=e^{2i\pi}=1$。那么，还有没有这类 i，e，π“亲密接触”的公式呢？

1719 年，意大利业余数学家法格纳诺（1682～1766）得到 $\pi=4\ln[(1-i)/(1+i)]^{i/2}$。在这个式子中，i，e，π 再次“桃园三结义”。$\ln[(1-i)/(1+i)]^{i/2}$ 的样子似乎是虚数，但却是实数 π/4——0.785…。

i^i 是虚数吗？“样子”似乎有点像。欧拉给出了正确的答案：$i^i=e^{-\pi/2}=0.207\cdots$ 是一个实无理数。由此可得 $i^{-i}=i^{1/i}=\sqrt[i]{i}=e^{\pi/2}=4.810\cdots$ 可见，i^i，i^{-i}，$i^{1/i}$，和 $\sqrt[i]{i}$ 都不是虚数。在这里，i，e，π 再“桃园三结义”。欧拉的 $i^i=e^{-\pi/2}$ 被苏联数学家盖尔丰德写成 $e^{\pi}=i^{-2i}$。

欧拉的 $i^i=e^{-\pi/2}$，还可变形为 $i\ln i=-\pi/2$，可见 $i\ln i=-1.570\cdots$，所以 ilni 也不是虚数。在这里，i，e，π 又一次“桃园三结义”。

5.6 悄悄走近“数学王子”——素数定理中的 e

一个自然数如果没有 1 和它本身以外的整数因子，那它就是质数即素数。

古希腊大数学家欧几里得在《几何原本》第 9 卷命题 20 中，用反证法证明了素数有无穷多个（他表述为“素数的个数

比任意给定的素数都多”)，所以“素数有无穷多个”称为“欧几里得定理”。

现在的问题是，如何判断某自然数是不是素数，素数是怎么分布的，所有的素数占自然数总数的比例有多少，有没有和找没有找到能求出所有素数的简单公式？

古希腊数学家埃拉托色尼（Eratostheness，公元前 284 至 274～前 194）首先发明了鉴别素数的“筛法”（图 5-3），但这个有重要应用价值的方法却没有多大理论价值，2000 多年来也没有重大进展。

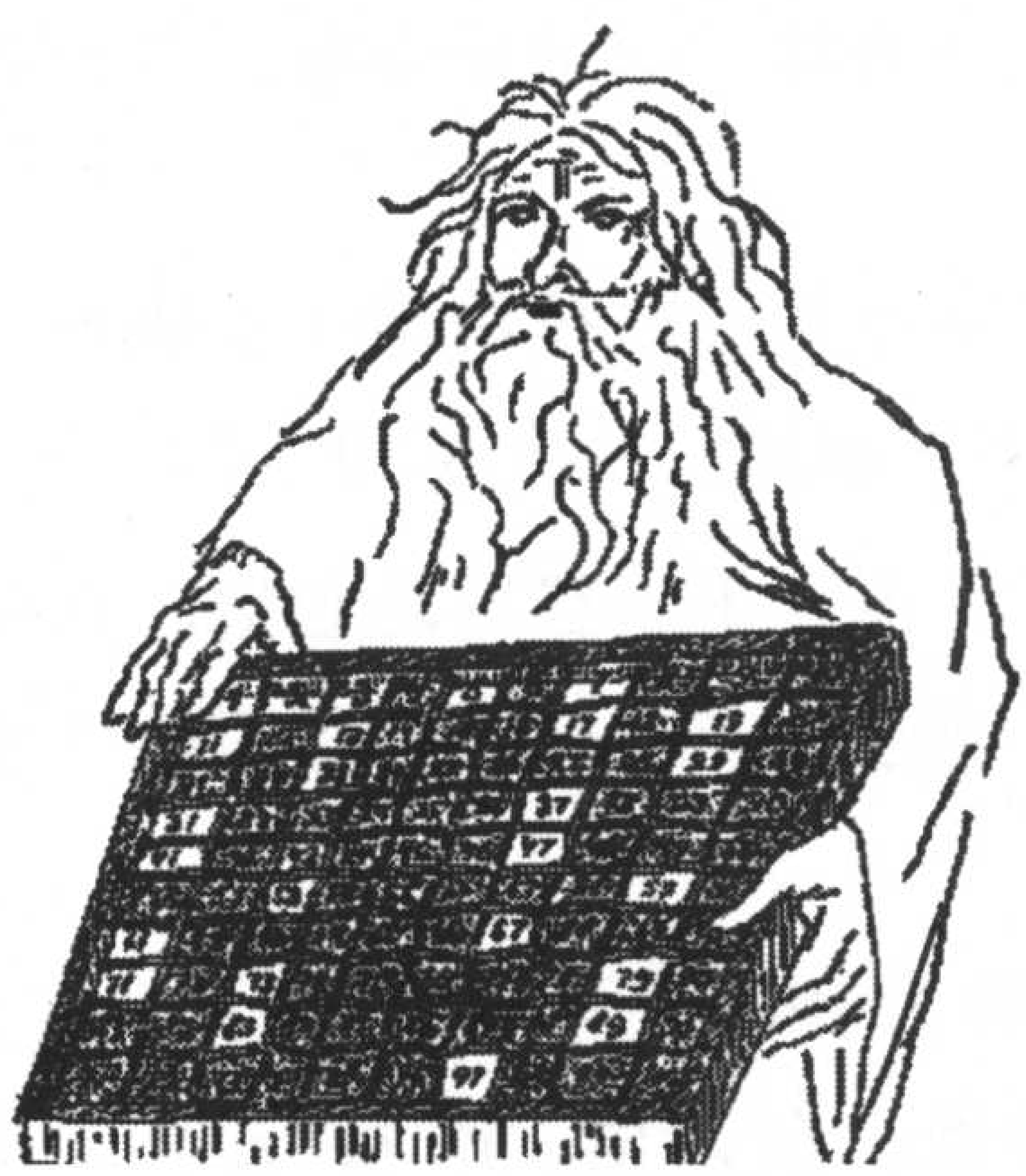


图 5-3　埃拉托色尼的“筛子”

直到 1920 年前后，挪威数学家布伦才首先对埃拉托色尼筛法做出有重要理论价值的改进。之后，苏联数学家林尼克(Юрий Владемерович Линик，1915～1972)在 1942 年取得又一次重大突破——发明了“大筛法”。1947 年，另一位美籍挪威数学家塞尔伯格（Atle Selberg，1917～）用求二次型极值的简单思想完成了又一次改进。

借助于电子计算机，到 20 世纪 90 年代初，不大于 104 395 301的素数已经有表可查；而在 20 世纪 60 年代，美国已将 600 万个素数放进电子计算机的存贮系统。

寻找素数分布的规律，是数论中的基本问题。可是自欧几里得以来的许多著名数学家都绞尽脑汁，但却没有得到实质性

的进展。

如果用π(x)来表示不大于 x 的素数的个数——例如用π(10)=4 表示不大于 10 的素数的个数是 4 个（2，3，5，7），那所谓素数分布问题就是，找出一个用 x 来表示 π(x)的公式。注意这里的 π 不表示圆周率。

到了 1793 年，德国数学家高斯（Carl Friedrich Gauss，1777～1855）（图 5-4）由直觉看出了素数的渐近分布定律：π(x)和 $\int_2^x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的差别非常小。你看，e“莫名其妙”地出现在一个似乎完全与它无关的式子之中。高斯是在根据兰伯特和自制的素数表，研究 3 000 000 以内的素数后得出这一结论的。



图 5-4　高斯

“由直觉”就能“看出”规律，这对高斯来说倒不是天方夜谭。据说他曾开玩笑地说：“我从婴儿时就开始从事数学计算了。”小学课堂上就用等差级数求和的方法很快算出 1+2+3+…+100=5050，人们把他称为“数学王子”。

高斯发现了正 17 边形的尺规作图法从而走上了数学道路，于是留下遗言：“我死后，请把 17 边形留在我的墓碑上”。所以，他的至今还保留在德国不伦瑞克的、正面刻有“数学元首”（Mathematicarum Princeps）字样的墓碑，就是正 17 边形。1897 年 7 月，在不伦瑞克举办了第 30 届国际奥林匹克数学竞赛（IMO），大家也把环绕高斯肖像的正 17 边形作为这届 IMO 的会徽。



图 5-5　勒让德

1798 年，法国数学家勒让德（Adrien - Marie Legendre，1752 ~ 1833）（图 5-5）提出了素数分布定律的初步形式，1808 年又把它精确化，给出了 $\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x-1.083\,66}$ 的形式。你看，e 的芳踪倩影再现在这个式子中。

勒让德还宣称并在 1830 年再次强调，他是用归纳法发现这个非凡的定律的。可是他并没有严格证明这个定律，所以还只能称为猜想。但是他研究过 400 000 以内的素数表，可见这个猜想是有根据的。

高斯和勒让德还猜测 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$，这个猜想就是著名的素数定理。这里 e 又出现了。

1849 年，俄国数学家切比雪夫（Пафнутий Львович Чебыщв，1821～1894）（图 5-6）发表的博士论文，在假定 $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 极限存在的前提下证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$，在此论文的基础上，他又在当年用法文写的另一篇论文《确定小于某个数的全部素数之数目的函数》中，指出勒让德式子中的“最佳逼近值”不是 1.083 66 而是 1，并对可以使高斯表达式和勒让德表

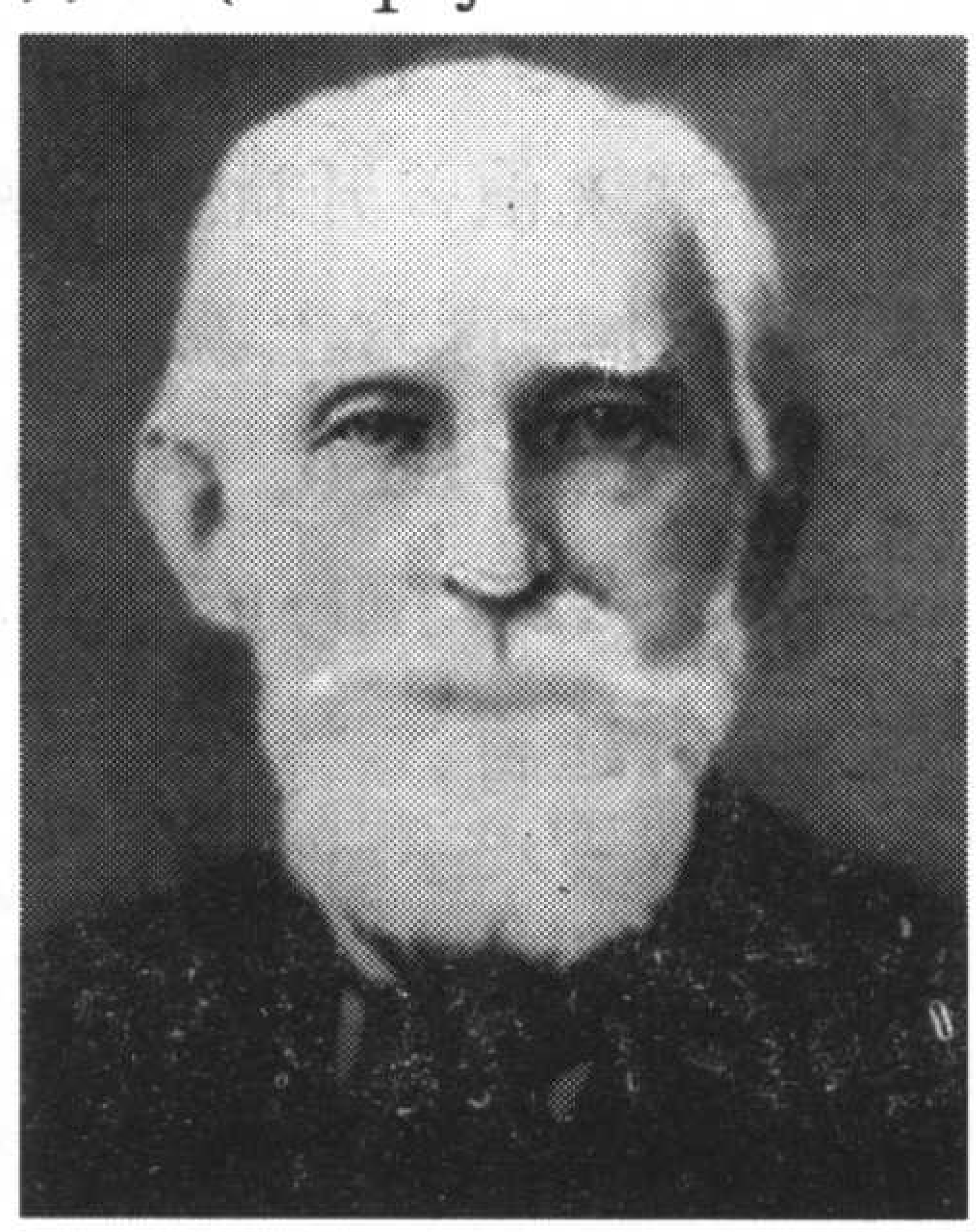


图 5-6　切比雪夫

达式都适用的 x 下限进行了估计：当 $x>1\ 247\ 689$ 时，$\frac{x}{\ln x-1.083\ 66}$和$\int_2^x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的差可以忽略不计。

但是，1849 年切比雪夫"$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 的极限存在"的假定却一直没有人证明。以至在 1881 年，英国数学家西尔维斯特(James Joseph Sylvester，1814～1897）曾悲观地评论说："我们或许要等待世界上产生这样一个人，他的智慧和洞察力像切比雪夫一样，证明自己超人一等（才能解决问题)。"

"我们必须知道，我们必将知道。"1930 年，德国大数学家希尔伯特（David Hilbert，1862～1943）在接受哥尼斯堡荣誉市民称号的讲演中这样满怀信心地宣称。此时，我们必须把这句也刻在他墓地的石碑上的话送给西尔维斯特和全人类，以扬起探索未知世界信心的风帆。

历史果然产生了西尔维斯特所说的、像切比雪夫一样的"超人"。在切比雪夫"假定"大约半个世纪以后的1896年，法国数学家阿达马（Jacques Hadamard，1865～1963)（图 5-7）和比利时数学家德拉瓦莱·普桑（Charles de La Vallee-Poussin，1866～1962）各自几乎同时独立证明了$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$。


图 5-7　阿达马

阿达马和普桑的证明，用了复变函数的理论和 1859 年黎曼（图 5-8）的论文《论小于给定数的素数的个数》中的思想。这个被称为"素数分布中心定律（理)"的式


图 5-8　黎曼

子，也可以写成$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$的形式。这里的“～”表示$\pi(x)$和$\frac{x}{\ln x}$“同阶”或“相当”。由这个定理可以推出第$n$个素数是$p_n\sim n\ln n$。

高斯当年也估计了$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$，但他认为比$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$的精度差。

上面提到的黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826～1866），是一位德国数学家。他在一生中唯一发表的数论方面的论文就是1859年那篇《论小于给定数的素数个数》的8页论文，该论文思想深刻，给阿达马和普桑提供了强大的思想武器。

1948（一说1949）年，美籍挪威数学家塞尔贝格（Atle Selberg，1917～）和匈牙利数学家厄尔多斯（Paul Erdös，1913～）没有用复变函数的理论，而是用“初等方法”证明了“素数分布中心定理”。但是，这个“初等方法”也非常艰深，以至无法在这里叙述。

我们再回到切比雪夫的研究上来。

1850年（发表于1852年），切比雪夫又向俄国科学院提交了名为《论素数》的重要论文。他在这篇论文中指出，当x很大的时候，有

$$0.921\,29\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant1.105\,55\frac{x}{\ln x}$$

的结果。这篇论文还附带解决了著名的“贝特兰德猜想”。

所谓“贝特兰德猜想”，是法国数学家贝特兰德（Joseph

Louis Francois Bertrand, 1822～1900）在 1845 年提出的：当 x 是自然数的时候，x 和 $2x$ 之间（包括 x 和 $2x$）至少有一个素数存在，并进一步猜想，当 $x>3$ 的时候，x 和 $(2x-2)$ 之间至少有一个素数存在。而更精密的"在 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间必有一个素数"的猜想至今还没有解决。

不过，更早进行这种猜想的却是勒让德。他在 1785 年就说，在每一个算术级数 $ax+b$（a 和 b 互质，$x=0, 1, 2\cdots$）中，都有无穷多个素数。

虽然素数有无穷多个，但是素数出现的概率却为 0，因为欧拉和勒让德已经先后证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{x}=0$。"无穷多个素数出现的概率为 0"表明，所有的素数占自然数总数的比例几乎为 0，这看似悖谬的正确结论，无疑是非常有趣的。由此可见，概率为 0 的事件不一定是不可能事件；类似，概率为 1 的事件不一定是必然事件。

那么，数学家们找没有找到能求出所有的素数的简单公式呢？

1772 年，欧拉找到了一个二次函数 n^2-n+41，它在 $n=0,1,2,\cdots,40$ 的时候，都表示素数，但在 $n=41$ 时就"不灵"了。

1798 年，勒让德还给出 n^2+n+41，但在 $n=40$，41 时也"不灵"了。

20 世纪的毕格尔给出的 $n^2-n+72\,491$，对 1～11 000 之间的自然数都能产生素数，但……

1837 年 7 月 27 日，德国数学家狄利克雷（Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805～1859）在柏林科学院会议上，提交了对前述勒让德猜想的解答：他证明了形如 $ax+b$（a 和 b 互

质，$x=0,1,2\cdots$）的算术级数中包含无穷多个素数。这被称为算术级数的素数定理，即现在所称的狄利克雷定理。他的证明利用了级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$$

（a_n，z 是复数）和二元二次型类数的计算等分析工具和方法，成为解析数论的开创性工作。



图 5-9　哈代

但至今人们还没有找到全部由素数组成的算术级数。

后来，拉比诺维奇、米尔斯、英国数学家哈代（Godfrey Harold Hardy，1877～1947）（图 5-9）等数学家，都对素数公式做过研究。

1963 年秋，美国洛斯·阿拉莫斯科学实验室的数学家乌拉姆（Stanislaw Marcin Ulam，1909～1984），在参加一个学术会议时，对冗长而缺乏新意的报告不感兴趣，他就在笔记本上无意之中把 1，2，3，…，100 按反时针方向排成螺旋状，以消磨时间。当他把其中的素数圈出来的时候，惊奇地发现这些素数都排列在图 5-10 所示的直线上。后来，他照这样把自然数排了 6500（一说 65000）个，上述特征依然存在，于是他和他的同事斯坦因（Myron L. Stein）和韦尔斯（Mark B. Wells）一起，用当时具有最先进绘图功能的电子计算机 Maninc Ⅱ，把 1000 万以内的自然数也这样排列并打印出来，结果仍然有素数排列成直线的现象!

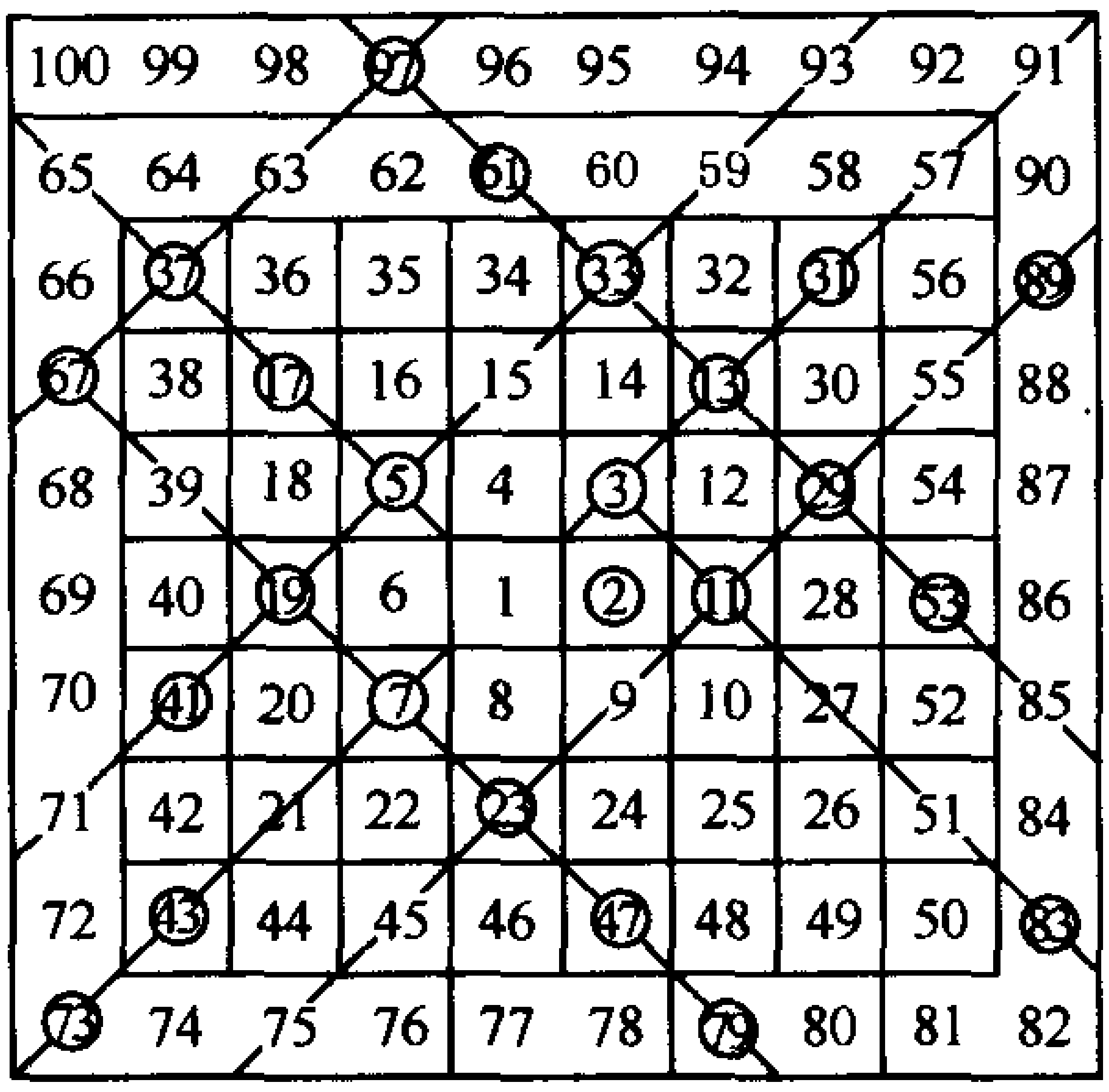


图 5-10 乌拉姆表格：素数排成直线

素数的这个有趣现象，被称为“乌拉姆现象”。数学家们在“乌拉姆现象”中，又找到了素数的许多趣味现象，但是产生这个现象的原因，至今还是一个谜。

不过，数学家们至今没有找到一个简单公式，让这个公式算出来的所有数都是素数；更没有找到能够求出所有的素数的简单公式。但据说在英国数学家哈代的著作中，已经有比较复杂的公式——由这个公式算出来的所有的数都是素数。

另外，在 20 世纪 80 年代有人宣称，有一个比较复杂的公式

$$f(m,n)=\frac{n-1}{2}\{|[m(n+1)-(n!+1)]^2-1| - [m(n+1)-(n!+1)]^2+1\}+2$$

“据说从理论上说可以产生全部素数”，其中 m，n 是自然数，$f(m,n)$的值域是全体素数。

不过，这个公式有两大缺点，一是要算出奇素数 p，就必须算出 $(p-1)!$，这在 p 非常大的时候实际上是做不到的；二是用它算出来的素数，多数时候都是 2。

那么，这个公式是否能产生全部素数呢？

我们还是从另一个能“表达所有素数的函数”说起吧。

1976 年，滑铁卢大学的教授罗斯·杭斯伯格（Ross Honsberger）从著名的威尔逊定理出发，在他所著的、由美国数学会出版的《数学珍宝》(Mathematical Gems Ⅱ）一书中，给出了下面的据称能产生每一个素数的函数

$$f(x,y)=\frac{y-1}{2}[\,|B^2-1|-(B^2-1)+2]$$

其中 $B=x(y+1)-(y!+1)$，x 和 y 是自然数。

由这个函数，就可以得到前面的“据说从理论上说可以产生全部素数的公式”。

这里提到的威尔逊（John Wilson，1741～1793），是一位英国数学家。威尔逊定理说，如果 p 是素数，那么 $(p-1)!+1$ 就能被 p 整除；如果 p 是合数，那么 $(p-1)!+1$ 就不能被 p 整除；而且，如果 q 能整除 $(p-1)!+1$，q 就是素数。英国数学家华林（Edward Waring，1734～1789）在 1770 年发表的《代数沉思录》（Meditationes Algebraicae）一书中公布了这个定理。

杭斯伯格宣布这个成果后，世界各国的数学家都非常重视，中国的《数学译林》杂志在 1984 年第 3 期也节译了有关章节。但值得玩味的是，加拿大昆士大学（Queen's University）的数学家本鲍姆（Paulo Ribenboim），在 1996 年出版了一本有关素数的出色的专著《The New Book of Prime Number Records》中，虽然把《数学珍宝》列为参考书目，但对杭斯伯格那能“表达所有素数的函数”，却缄口不提。

由此看来，对“据说从理论上说可以产生全部素数”的公

式，和能“表达所有素数的函数”，都应持谨慎态度。

对素数的研究，绝不是闹着好玩。例如，中国学者张春暄认为，素数反映了自然界在量的方面的某种稳定性，并由此提出了以“素数原理”（由素数个基本单位构成的多体结构是有极性的稳定系统——如电荷的正、负）和“对称原理”（由双奇素数个基本单位构成的多体结构是中心对称的稳定系统——如原子结构）为基础的“多稳定性理论”。

5.7 从科克到维诺格拉多夫——对数积分和指数积分中的 e

对数积分（logarithmic integral，又叫积分对数）和指数积分（exponential integral，又叫积分指数）的定义中都有 e，它们分别是

$$\mathrm{Li}x=\int_0^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \text{ 和 } \mathrm{Ei}x=\int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$

$\mathrm{Li}x$（有时也写作 $\mathrm{li}x$）在下面的估计比 x 小的素数个数的问题中，有重要应用。

前面提到的阿达马和德拉瓦莱·普桑各自独立证明的 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x}=1$ $\left(\text{式子中 } \mathrm{li}x=\int_2^x\frac{\mathrm{d}u}{\ln u} \text{ 即积分对数}\right)$ 等价。

阿达马和普桑完成他们的证明之后，数学家们一直在求 $\mathrm{li}x-\pi(x)$ 的最佳误差。

例如，在 1901 年，H. 冯·科克（Koch）在黎曼猜想成立的假设下证明了

$$\pi(x)=\mathrm{li}x+O(\sqrt{x}\ln x)$$

这里$O(n)$表示n次正交（变换）群。

又如，在1908年，德国数学家兰道（Edmund Georg Herman Landau，1877～1938）证明了

$$\pi(x)=\mathrm{li}x+O(xe^{-e\sqrt{\ln x}})$$

其中$\pi(x)$是不超过x的素数的个数。



图5-11　李特尔伍德

再如，在1914年，英国数学家李特尔伍德（John Edensor Littlewood，1885～1977）（图5-11）给出素数定理的余项估计式

$$\mathrm{li}x=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\ln x}$$

这个估计式是黎曼在1859年的论文《论小于给定数的素数的个数》后半部分得出的$\pi(x)$和$\zeta(s)$的关系

$$\prod(x)=\mathrm{li}(x)-\sum_{\rho}\mathrm{li}(x^{\rho})+\int_x^{\infty}\frac{1}{u^2-1}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}+\text{常数}$$

中的一部分

$$\prod(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{1/2})+\frac{1}{3}\pi(x^{1/3})+\cdots$$

$$\mathrm{li}(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\ln x}$$

最后，在1958年，俄国-苏联数学家维诺格拉多夫（Иван Виноградов，1891～1983）和科罗博夫（H.M.Коробов）各自独立得到更为精确的结果

$$\pi(x)=\mathrm{li}x+O(xe^{-\alpha(\ln x)^{0.6+\varepsilon}})$$

式中 $\alpha>0$，$\varepsilon>0$ 为任意给定的实数；相应的 ζ 函数无零点区域为

$$\sigma \geqslant 1-C/(\ln(|t|+3))^{2/3+\varepsilon}$$

这些都是迄今已知的最好结果。

此外，在对“丢番图逼近”的研究中，有一个“伯恩斯坦定理”，其中也涉及“li”。

这里提到的丢番图（Diophantus of Alexandria，约 246～330）是古希腊数学家。伯恩斯坦（Сергей Натанович Вернштейн，1880～1968）是俄国-苏联数学家。

Eix 在量子力学中也有重要应用。

“Ei”和“Li”之间的关系 Eix = Lie^x，用 e 做纽带，也很有趣。

5.8 从麦齐里阿克到陈景润——华林-哥德巴赫猜想中的 e

1742 年 6 月 7 日，德国数学家哥德巴赫（Christian Goldbach，1690～1764）在给欧拉的信中提出猜想（用现代语言表示）：①每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数的和——通常称为“偶素数哥德巴赫猜想”；②每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数的和——通常称为“奇素数哥德巴赫猜想”或“三素数猜想”。欧拉在 6 月 30 日回信认为这个猜想可能成立，并作了补充：只需说每个大于 2 的偶数都是两个素数之和就行了。这就是著名的“哥德巴赫猜想”，通常简称“1 + 1”。

1937 年，俄国-苏联数学家维诺格拉多夫，用改进了哈代和李特尔伍德等在 20 世纪 20 年代创立的“圆法”和他本人独

创的“三角和估计法”，基本上完全证明了②，使三素数猜想成为“三素数定理”。但对①的证明进展甚微。

对“1+1”最好的结果，是中国数学家陈景润（1933～1996）在1966（1973简化并得到国际上的承认）年证明的“1+2”。这“移动了群山”的成果，被英国数学家哈勃斯丹和德国数学家李西特收入正在印刷中的《筛法》一书中，作为第十一章。

英国数学家华林（1734～1789）在1770年发表的《代数沉思录》一书中第204～205页也猜想：任何一个自然数都表示成4个整数的平方和，不超过9个自然数的3次幂的和，不超过19个自然数的4次幂的和，等等。并把哥德巴赫猜想首次公之于世。

进一步，华林又提出：任何（后来改为“充分大的”）一个自然数都能用不超过 r 个自然数的 k 次幂的和来表示，其中 r 依赖于 k。这些他都没有给出证明。

100多年后的1909年（一说1908年），希尔伯特才用多重积分巧妙地证明了华林猜想，实现了这个问题的重大突破。不过，他涉及庞大的数值，方法（称为“希尔伯特定理”）也比较复杂，在近代数论发展中没有找到进一步的应用。后来，数学家们又把它推广成广义华林问题。

不过，还有一位比华林更早的“华林”——法国科学院的麦齐里阿克（B. Meziriac，1587～1638）。他在早于华林100多年研读丢番图的《算术》一书时，就提出了华林猜想的一个特殊情形：从4开始的任何非平方数，都可以分解成2个、3个或4个数的平方之和。

华林猜想与哥德巴赫猜想密切相关，所以有的资料把它们连在一起称为华林-哥德巴赫猜想。

在有关华林问题的研究中，含 e 的式子很多。例如，数学家们把不能表示为两个奇素数之和的偶数称为“哥德巴赫例外数”，并用$E(x)$来表示不超过 x 的哥德巴赫例外数的个数，那就有含 e 的式子

$$E(x)=O(x/(\ln x)^{A})(A \text{ 是正数})$$

由这个式子可以推出，几乎所有的偶数都可以表示成两个奇素数的和。

这个式子是在 1937 年前后，由以下 5 位数学家各自独立地用维诺格拉多夫的一个猜想的思路证明的：华罗庚（1910～1985）(图 5-12)、苏联邱达可夫（Чудаков)、加拿大海尔布隆（Hans Arnold Heilbronn，1908～1975)、荷兰范·德·科普特（Johannes G. van der Corout，1890～1975）和埃斯特曼（T.Estermann)。

在华林问题上，包括华罗庚和陈景润在内的几位中国数学家取得了一系列的重要成果。


图 5-12　华罗庚

1938 年，华罗庚把哈代等用“圆法”得到的成果改进为含有 e 的“华氏不等式”

$$\int_0^1\left|\sum_{x=1}^{p}\mathrm{e}(\alpha x^k)\right|^{2k}\mathrm{d}\alpha \ll p^{2k-k+\varepsilon}$$

华罗庚在 20 世纪 30～40 年代对华林问题等的研究得到了重大的成果，记载在他的名著《堆垒素数论》之中。后来在 1959 年，华罗庚又证明了一个有关华林问题的重要式子。

对华林问题等的研究，苏联数学家林尼克（1915～1972）在 1942 年取得了又一次重大突破，发明了“大筛法”。他还在 1943 年给予希尔伯特定理一个“初等证明”，这个证明的想法来自哈代、李特尔伍德和华罗庚的某些式子。

1948 年，匈牙利数学家瑞尼（A.Rényi）用林尼克的大筛法证明了

$$\Re(x,\eta) = O(x/(\ln x)^A)$$

这个式子中也有 e，其中 $\Re(x,\eta)$的定义是

$$\Re(x,\eta) = \sum_{d\leqslant x\eta}\mu^2(d)\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\varphi(y;d,l) - \frac{y}{\phi(d)}\right|$$

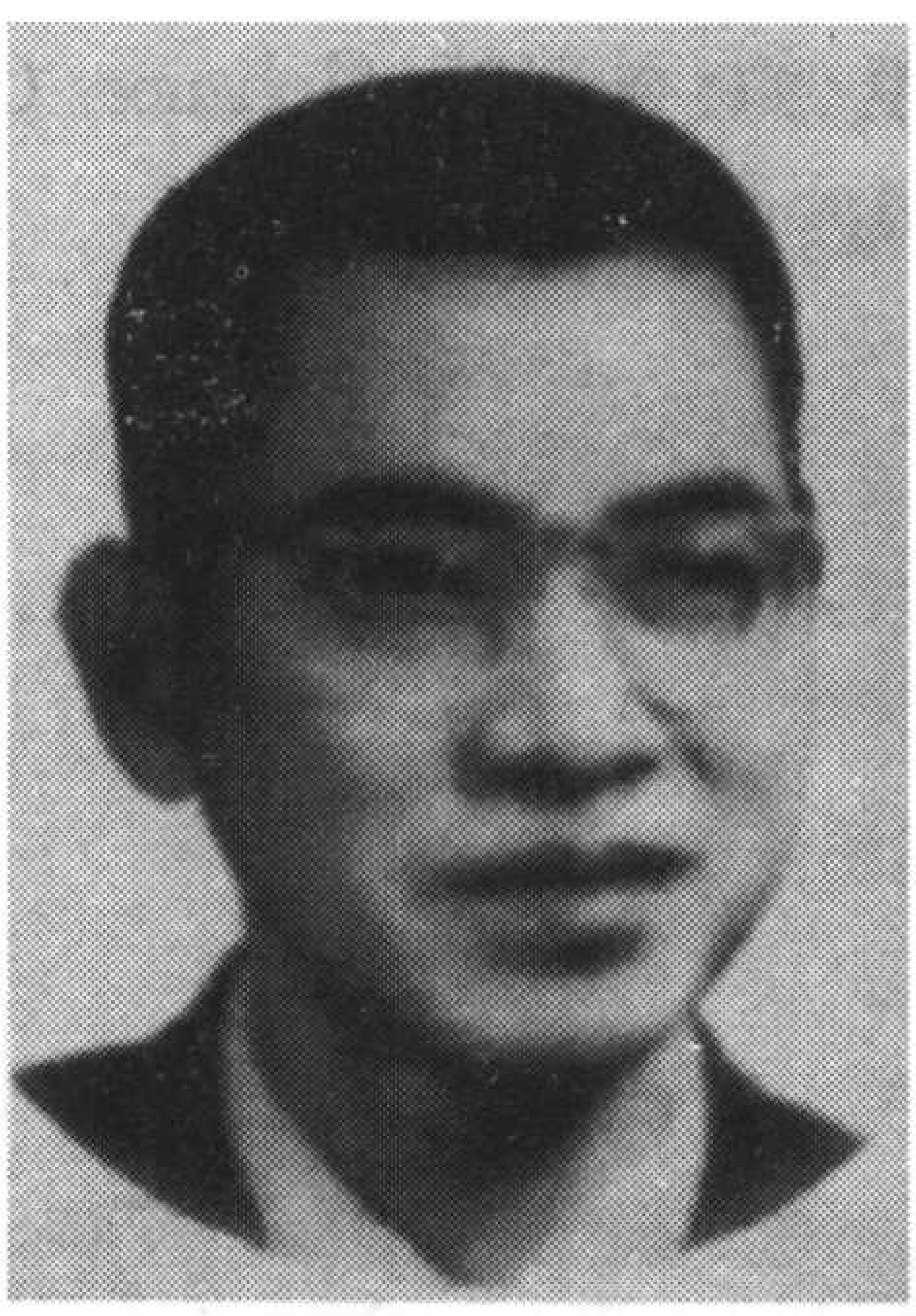


图 5-13　陈景润

1958 年，陈景润（图 5-13）在华林问题的研究中得到 $G(k)\leqslant k(3\ln k+5.2)$。9 年以后，瓦恩（R.C.Vaughan）才把它改进为 $G(k)\leqslant k(3\ln k+4.2)$。这里又有 e。

1972 年，瓦恩证明了存在常数 $c>0$，使得

$$E(x) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$$

这个也含 e 的公式是对上述公式的发展。

而在陈景润和瓦恩之前的 1947 年，林尼克就得到了 $G(3)\leqslant 7$ 的结果。

1964 年和 1974 年，陈景润分别证明了 $G(5)=37$ 和 $G(4)\leqslant 27$。1985 年，巴拉苏不拉马连（R.Balasubramanian）将陈景润证明$G(5)=37$ 的方法加以改进，得到了 $G(4)\leqslant 20$。1986 年，巴

拉苏不拉马连、戴舍尔（J.M.Deshouillers）和德莱斯（F.Dress）最终证明了 $g(4)=19$。不过，这里的"$g(4)=19$"在科学出版社 1984 年出版的《数学百科辞典》336 页却是"$G(4)=16$ (H.Davenport, 1939)"。这里的"H.Davenport"，就是英国数学家达文波特(Harold Davenport, 1907～1969)。

有人认为，研究像华林－哥德巴赫猜想这类问题"毫无意义"，因为没有任何应用价值或"经济效益"。这种看法对吗?

古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前 260～前 190 或前 170）的《圆锥曲线论》，在 2000 年以后的 17 世纪才帮助开普勒光辉地为"天空立法"。

1917 年，奥地利数学家拉东（Johann Karl August Radon, 1887～1956）在积分几何研究中引进的一个数学变换，后来成了 XCT（X 光断层扫描仪）的理论基础，这一变换在 X 光天文学中也有重要应用。

王选（1937～）发明的精密汉字激光照排系统，早先认为是一个"数学游戏"。

……

当然，我们无法对上述实例"未卜先知"，但"科学像金子，总会闪光"。

由此可见，"毫无意义"论反映出目光短浅或急于求成。

可是，拿着"科学望远镜"的人却不这样急功近利。

1986 年，美籍华裔数学家陈省身（1911～2004）在香港中文大学作《什么是几何》的讲演中说：中国千余年来发展不快，在于中国数学太注重实践，而忽略了许多暂时没有应用的理论。

2000 年 3 月 18 日，英国费伯和美国布卢姆斯伯里两家出

版社，宣布悬赏100万美元奖励在两年内证明哥德巴赫猜想的人。

2004年的诺贝尔物理学、化学、生理学或医学以及经济学奖，几乎被视为现在没有什么作用的科学。

……

美国数学家纽曼（James Newman）曾说："数学最抽象无用的研究被人们发现以后，常常被其他部分所俘获，成了解决问题的工具。我想，这不是偶然的，就好像一个人戴了一顶高帽子去参加婚礼，后来在火灾时发现它居然可以当水桶用。"这就是我们不能放弃研究华林－哥德巴赫猜想这类问题的理由。

对任何数学以致整个科学理论，都应该持这样的态度。

5.9 "吉利斯猜想"——梅森素数个数中的e

2004年5月30日，是一个"悲哀"的日子——对于迈克尔·沙夫和他的"爱子"。

2003年11月17日，美国密歇根大学化学工程系26岁的研究生沙夫，生下了他的"爱子"——发现了当时的最大素数$2^{20\,996\,011}-1$，它是一个6 320 430位的梅森素数。

令沙夫"悲哀"的是，仅仅过了半年，他的世界纪录就被打破。2004年5月30日，美国国家海洋和大气局（NOAA）的信息顾问、数学爱好者约翰·芬德力，对外公布了他发现的梅森素数的最新世界纪录$2^{24\,036\,583}-1$，它是一个7 235 733位数。芬德力是用一台装有2.4GHz的奔腾处理器的个人电脑，和GIMPS（"全球因特网梅森素数大搜寻"的英文——Global

Inetrnet Mersenne Prime Search 的缩写）程序得到这个素数的。GIMPS 由 24 万台分布在全球的电子计算机联网构成，芬德力就是参加 GIMPS 项目的 75 000 名自愿者之一。

可是芬德力还没有高兴到一年，他的世界纪录也被打破。2005 年 2 月 28 日，GIMPS 的组织宣布，该组织的一位德国数学爱好者发现了迄今最大的素数 $2^{25\,964\,951}-1$，这个梅森素数有 7 816 230 位。

……

梅森素数是一个几乎岁岁年年都在研究和经常引起轰动的古老课题。1963 年 9 月 6 日 20：00 分，美国广播公司（ABC）突然中断了正常的节目，以第一时间播放新发现的梅森素数 $2^{11\,213}-1$ 就是明证。这次轰动的中心是在伊利诺斯大学数学系，这里的师生无比骄傲，以至把从系里发出的所有邮件都盖上"$2^{11\,213}-1$ 是个素数"的邮戳。

美国克雷研究公司的计算机专家戴维·斯洛温斯基（D. Slowinski）被称为"素数大王"。1979 年 2 月 23 日，在他声称发现了梅森素数 $2^{23\,209}-1$ 的时候，人们对他说，两周前加州大学一年级的学生柯特·诺尔等已经得到同样的结果时，他有点失望。在失望之余，他决心"更上一层楼"。一个半月以后，他用超级电脑算出了更大的梅森素数 $2^{44\,497}-1$；同时，赖尔森（H. Lelson）等也算出了这个素数。接着，斯洛温斯基又发现了 6 个更大的梅森素数（见表 5-1），成为发现大素数最多的人。

……

说起法国科学院奠基者之一、修道士兼数学家梅森（Marin Mersenne，1588～1648），人们都不陌生。他以于 1640

年提出的一个可能构成一部分素数的公式闻名于世。这个公式记载于他 1644 年出版的《物理学和数学的深思》（又译《物理-数学探索》）一书的序言中。这个公式可以得到梅森数 $M_n = 2^n - 1$（n 是素自然数）中的梅森素数。梅森当时认为，当 n=2，3，5，7，13，17，19，31，67，127，257 这 11 个素自然数时，$M_n = 2^n - 1$ 是素数。他证明了前 7 个 M_n 是素数，但对后 4 个 M_n 因计算量太大而未能验证。

梅森死后，他提出的梅森数和其中的梅森素数问题引起了数学家们的极大兴趣。

1772 年，欧拉在双目失明的情况下，以惊人的毅力心算证明了 M_{31}是素数，他也因此被称为“数学英雄”。后来，美国数学家科尔（F.N.Cole）在 1903 年证明了 M_{67}不是素数：$M_{67} = 2^{67} - 1 = 193\ 707\ 721 \cdot 761\ 838\ 257\ 287$。人们还发现梅森漏掉了 $n<257$ 时的 3 个：M_{61}，M_{89}，M_{107}。这样，当 $n \leqslant 257$ 时，梅森素数是 13 个。

截至 2004 年 5 月 30 日，一共发现了 42 个梅森素数。另一种说法是，发现了 44 个梅森素数：加上如表 5-1 所示的序号为 11（取自《数学家辞典》546 页）和序号为 20（取自《简明数学史辞典》322 页）这两个。

表 5-1 序号≤13 的人工计算，其余电子计算机计算

序号	n	梅森素数 $M_n = 2^n - 1$	发现时间	发现人
1	1	3	古代	
2	3	7	古代	
3	5	31	古代	
4	7	127	古代	
5	13	8191	1461，1588	无名氏，意大利卡塔尔迪

续表

序号	n	梅森素数 $M_n=2^n-1$	发现时间	发现人
6	17	131 071	1598，1640	意大利卡塔尔迪，梅森
7	19	524 287	1606，1640	意大利卡塔尔迪，梅森
8	31	2 147 483 647	1772	欧拉
9	61	19 位数	1883	俄国彼尔武申（1827～1900）
10	89	27 位数	1911	鲍维尔（R.E.Power）
11	97	30 位数	约 1912	
12	107	33 位数	1914	鲍维尔（R.E.Power）
13	127	39 位数	1876	法国鲁卡斯（1842～1891）
14	521	157 位数	1953.06	美国鲁滨逊（Robimson）等
15	607	183 位数	1953.06	美国鲁滨逊（Robimson）等
16	1279	386 位数	1953.06	美国鲁滨逊（Robimson）等
17	2203	664 位数	1953.06	美国鲁滨逊（Robimson）等
18	2281	687 位数	1953.06	美国鲁滨逊（Robimson）等
19	3217	969 位数	1957	汉斯·里塞尔（Hans.Riesel）
20	3281	988 位数	约 1957	
21	4253	1281 位数	1961	亚历山大·霍尔维兹（A.Hurwitz）
22	4423	1332 位数	1961	霍尔维兹（A.Hurwitz）
23	9689	2917 位数	1963	吉利斯（Donald.B.Gillies）
24	9941	2993 位数	1963	吉利斯（Donald.B.Gillies）
25	11 213	3376 位数	1963.09.06	吉利斯（Donald.B.Gillies）
26	19 937	6002 位数	1971	塔克曼（Bryant.Tucherman）
27	21 7013	6533 位数	1978.11.15	美国兰登·诺尔（Landon Curt Noll）和劳拉·尼克尔（Laura Nickel）
28	23 209	6987 位数	1979.02	美国兰登·诺尔（Landon Curt Noll）和劳拉·尼克尔（Laura Nickel）
29	44 497	13 395 位数	1979	美国赖尔森（H.Lelson）等、斯洛温斯基（David.Slowinski）
30	86 243	25 962 位数	1982	美国斯洛温斯基（D.Slowinski）
31	110 503	33 265 位数	1988	科尔基特（W.N.Colquitt）、小威尔士（L.Welsh，Jr）
32	132 049	39 751 位数	1983	美国斯洛温斯基（D.Slowinski）

续表

序号	n	梅森素数 $M_n=2^n-1$	发现时间	发现人
33	216 091	65 050 位数	1985	美国斯洛温斯基（D. Slowinski）
34	756 839	227 832 位数	1992	美国斯洛温斯基（D. Slowinski）
35	859 433	258 716 位数	1993	美国斯洛温斯基（D. Slowinski）
36	1 257 787	378 632 位数	1996.09.04	美国斯洛温斯基（D. Slowinski）
37	1 398 269	420 921 位数	1996.11.13	法国阿曼高德（Joel Armengaud）
38	2 976 221	895 932 位数	1997.08	英国斯潘塞（Gordon Spence）
39	3 021 377	909 526 位数	1998.01.27	美国克拉克森（Loland. Clarkson）
40	6 972 593	2 098 960 位数	1999	印度裔人哈依瓦拉（Nayan Hajratwala）等三人
41	13 466 917	4 053 946 位数	2001.11.14	加拿大卡麦伦（Michael Cameron）
42	20 996 011	6 320 430 位数	2003.11.17	美国迈克尔·沙夫
43	24 036 583	7 235 733 位数	2004.05.30	美国约翰·芬德力
44	25 964 951	7 816 230 位数	2005.02.08	德国数学爱好者

既然发现了这么多梅森素数，那么梅森数中的梅森素数究竟有多少——例如，是不是无限多呢？遗憾的是，这个问题至今还没有解决。

但是，在估计梅森素数的个数问题上，却有如下猜想：小于 m 的梅森素数的个数大约是 2ln（ln$m$）/ln2 个。看，e 在意想不到的场合出现了！这个猜想是吉利斯（Donald Bruce Gillies）在 1964 年做出的。

在进行这类猜想中，中国人也有辉煌的成就。中国数学家兼语言学家周海中，在 1992 年就首先给出了梅森素数分布的“周氏猜想”，这是国际数学界命的名。

在梅森素数的研究中，有许多有趣的谜。例如，目前知道的 10 000 位以上的大素数超过 16 个，“奇怪”的是，它们绝

大多数是梅森素数。个别例外之一是，在 1990 年初由美国数学家 J. 布朗等发现的 65 087 位素数 $2^{216\,193}\cdot 391\,581-1$。那为什么人们难以发现其他形式的大素数呢？

从 20 世纪 80 年代末开始，因特网（Internet）在全世界风靡一时并广泛使用。在 1996 年，居住在佛罗里达（Florida）州奥兰多（Orlando）的美国数学家兼退休电脑程序设计师乔治·沃特曼（George Woltman），就编制了极为丰富的免费电脑资源 GIMPS，来找寻更大的梅森素数。果然，用 GIMPS 就不断取得表 5-1 中序号为 37 及以后的成果。

GIMPS 不能简单地看作一种满足人类虚荣心而找到大梅森素数的数学游戏。

首先，它多年来都是评判电子计算机硬件综合水平的方法之一。例如，1985 年美国休斯顿切夫隆地球科学公司在测试一台 4 亿次/秒的电子计算机时，就偶然发现了表 5-1 中序号为 33 的梅森素数。

其次，它有实际应用。例如，关系到编制和破译密码的问题，因为许多密码都是用很大的数来编制的。

实例之一是，虽然在 1995 年 5 月 IBM 电脑公司的一个研究人员提出了"点阵约简"这个据说是更为安全的保密方案，但在 1977 年发明的、利用素数因子分解巨大数字的原理来为网络加密、提高网络安全性的 RSA 密码编制体系，仍广泛应用于各国政府、商业等方面的网络之中。

实例之二是，1995 年 4 月 25 日，600 多位专家用 1600 台电子计算机，持续费时 8 个月，把一个 129 位数（一说 128 位，图 5-14 左）分解为两个大素数的乘积，从而获得 100 万美元悬赏。从事这项工作的科学家们说，其难度比"找到空中

步行的方法”还大。解决这个 17 年悬而未决问题，所得到的密文是：The magic words are Squeamish ossifrage（不可思议的语言是神经质的秃鹰）。继此之后，在 1997 年，瓦格斯塔夫（Samuel Wagstaff）和他的同事在印第安纳大学花去 10 万机时，把一个长达 167 位的大数（$3^{349}-1$）/2 分解为两个大素数（各为 80 位和 87 位）的乘积（图 5-14）。

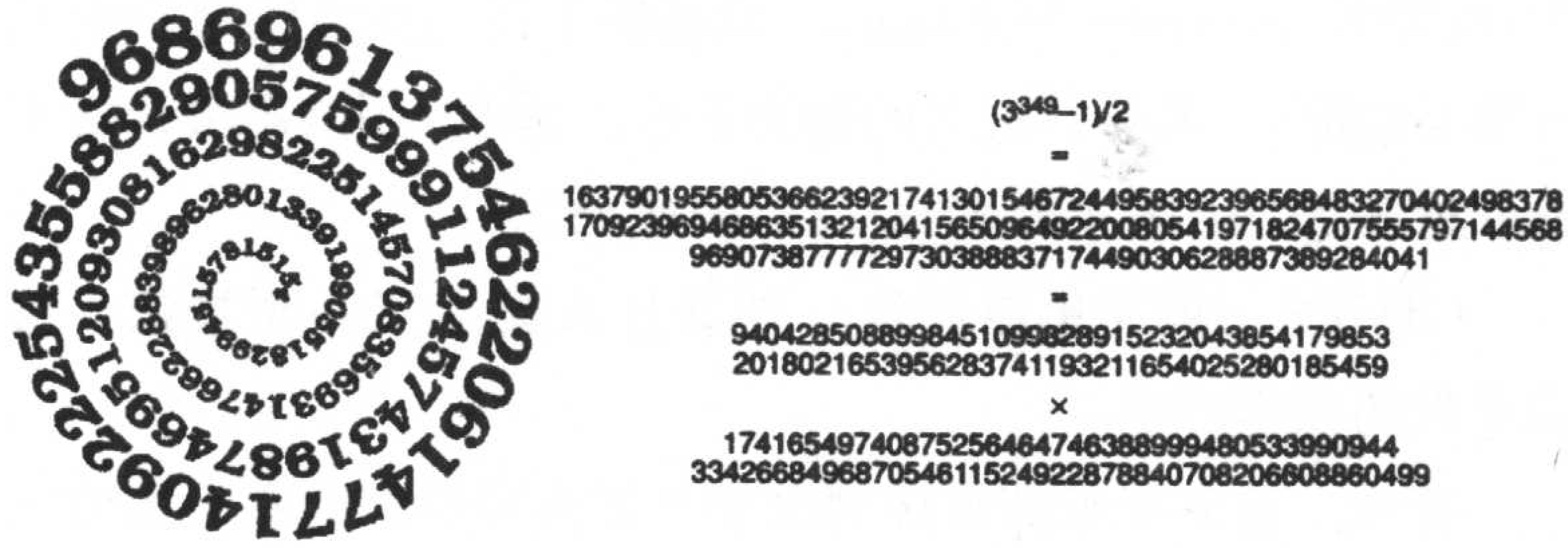


图 5-14　目前已知的最大的可分解为两个质因数的数

最后，素数的研究会极大地推动数论的发展，也会促进计算数学、程序设计技术、分布式计算技术、Internet 技术等的发展；这也是深刻的数学历史渊源和丰富的数学积淀在科学中的反映，在一定意义上体现了一个国家的数学水平。

为了进一步鼓励人们找出超过 1000 万位的素数，美国非赢利组织——“国际电子前沿基金会”（IEFF）在 2003 年宣布，由一位匿名的资助人提供了 10 万美元的奖金，用于首先实现这一目标的人。这项奖金的其他奖项是：超过 1 亿位，15 万美元；超过 10 亿位，25 万美元。当然，多数“素数爱好者”并非为奖金而战，他们主要是出于爱好和科学探索的精神需求。

5.10 半个世纪的积分探索——欧拉积分与 e

1729 年，欧拉以无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

定义了函数 $\Gamma(x)$。

1731 年，他在研究插值问题时，提出了形如

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}x^{n}e^{-x}dx\left(\text{或 }\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx\right)$$

和

$$B(m,n)=\int_0^{\infty}x^{n}e^{-x}dx$$

的含有 e 的积分的问题（其中 m 和 n 都是正数）。

欧拉为了把整数阶乘概念推广到任意非负数的情形，找到了一个对任意非负数 n 都成立的 $n!$ 都成立的表达式

$$n!=\int_0^{1}(-\ln x)^{n}dx。$$

可以看出，e 又出现在这个式子中。

半个世纪以后的 1781 年，欧拉终于给出了这个含有阶乘和 e 的现今形式

$$\int_0^{\infty}x^{n}e^{-x}dx$$

后来，法国数学家勒让德引进了记号 $\Gamma(n+1)=n!$，并把 $\Gamma(x)$ 称为 Γ 函数或欧拉第二（类）积分。后一个名称是因为当 x 是正实数的时候，

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}x^{n}e^{-x}dx$$

现在则把它叫做阶乘函数（factorial function）。

Γ 函数有许多用途。例如

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=\Gamma(n)$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(这又是一个 e 和 π “亲密接触” 的例子),

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-kx}x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{k-1}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(n)}{k^n}$$

顺便指出，Γ 函数有一个趣味性质：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$。例如 $\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，其中 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。事实上，这里的$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$就是前面的$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$。

此外，俄国数学家闵可夫斯基(Hermann Minkowksi, 1864～1909)，在用几何方法研究 n 个变元的正二次型的约化问题时，就用到 Γ 函数的渐近表达式，得到了对 n 维空间估计式

$$M<\frac{2n}{\pi\mathrm{e}}\sqrt[n]{n\pi\mathrm{e}^{1/3n}}\cdot\sqrt[n]{D}$$

这个式子中也有 e。

5.11 蠕虫能“如愿以偿”吗——欧拉常数中的 e

一条蠕虫，以每 1cm/s 的速度在一根长 1m 的橡皮绳上从一端爬向另一端。每当蠕虫爬完 1cm，橡皮绳就瞬间伸长 1m。

如果橡皮绳可以无限伸长，蠕虫也 “长生不老”，试问：蠕虫能爬到绳子的另一端吗？

乍一想，这蠕虫似乎永远也爬不到绳子的另一端，因为橡皮绳增长的速度（1m/s）远大于蠕虫爬行的速度 1cm/s。

不过，我们还是别先下结论——算算看再说。

首先，橡皮绳每秒钟伸长 1m，这种伸长是均匀的，而绳子伸长时，虫子爬过的那段也随之伸长，这样

第 1 秒末，绳子长 1m，蠕虫爬 1cm 即绳长的 1/100；

第 2 秒末，绳子长 2m，蠕虫在这一秒又爬了 1cm，即绳子长的 1/200。当然，此时第 1 秒钟蠕虫爬的长度也随之变长，而且它所占绳子长的比例 1/100 不变；

……

类似，蠕虫在第 n 秒钟爬了绳子长的 1/（100n）。

于是，前 n 秒内蠕虫总共爬了绳子长的

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\cdots+\frac{1}{(100n)}$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{100}$$

显然，如果蠕虫爬的长度 $l_n \geqslant 1$，那就说明蠕虫已经爬到了绳子的另一端。

由于 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的，所以让 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \geqslant 100$ 是可能的。所以，就归结为如何计算调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=? \tag{5.10}$$

的问题。

一位学者经过计算，得到 n 在 $2^{143} \sim 2^{144}$ 秒之间的结果，即 $n \geqslant 2^{144}$ 秒时，蠕虫爬到了绳子的另一端。当然，这是一个天文数字，但蠕虫是“长生不老”的。

另一位学者将（5.10）式变成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$>\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{ 项}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{ 项}}$$

$$=1+\frac{k}{2}$$

当 $k=198$ 时，$1+\frac{k}{2}=100$，于是

$$\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{198}}\right)>1$$

所以，不超过 2^{198} 秒，蠕虫就爬到了绳子的另一端。

“$\geqslant 2^{144}$ 秒”和“不超过 2^{198} 秒”的两个结果，实际上是吻合的。

1734 年，欧拉在一篇文章中给出了用对数函数求（5.10）式的有限多项和的方法是

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+c$$

其中 c 就是著名的欧拉常数——继 π 和 e 之后最重要的常数。

1740 年，欧拉发现 c 的值依赖于 n；但是，当 n 很大的时候，n 的值并不怎么影响计算的结果。也就是他发现了

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right] \qquad (5.11)$$

这个极限存在，它是一个常数，这个常数就是 c。看，e 就出现在欧拉常数中了。

欧拉的发现非常重要，$c=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]$ 是微分学中几个重要极限之一。

这个结果表明，当 n 足够大的时候，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$ 和 $\ln n$ 相当。例如，(5.10) 式的前 1000 项精确到 0.001 的时候是 7.485 470…，而 ln1000 = 6.907 755…，它们之间的差值小于 0.577 715…，相对误差不超过 ±0.05%，所以

$$\ln 1000 < 7.485\,470\cdots < 0.577\,715\cdots + \ln 1000$$

后来，有人还用小写希腊字母“嘎马”γ(gamma)来表示 c。这样，上面的结论就变成欧拉常数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

1735 年，欧拉曾算得 $c=0.577\,218$——这个值只有前 5 位小数才和准确值 0.577 215…吻合。另一种说法是，他“计算到小数点后第 16 位 $\gamma=0.577\,215\,66\cdots$”。

显然，可以快速计算 (5.10) 式的前 n 项的和。

下面，我们来证明 (5.11) 式。

当 $0<x<1$ 时，由 e^x 的泰勒展开式 $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$，可以得到

$$1+x<e^x<1+x+x^2+x^3+\cdots=1/(1-x)$$

所以有

$$\ln(1+x)<x<-\ln(1-x) \qquad (5.12)$$

把 $x=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$分别代入 (5.12) 式，让两端各自

分别相加、化简，并且应用对数的性质，就得到

$$\ln\frac{(n+1)}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n \qquad (5.13)$$

把（5.13）式两边分别加上 $1-\ln n$，就得到

$$1 + \ln\frac{n+1}{2n} < \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n < 1 \qquad (5.14)$$

设 $c_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n$，从 $c_{n+1}-c_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 0$，就知道 $c_{n+1} > c_n$，即 c_n 是单调增大的。

又由（5.14）式知道 $1+\ln\frac{1}{2} < c_n < 1$，即 $\{c_n\}$ 有界，所以序列 $\{c_n\}$ 有极限。

设这个极限是 c，那么 $c = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \ln n\right]$ 或 $c = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$，这就证明了（5.11）式，而且证明了其中 $1-\ln 2 < c < 1$，即 $1-0.693\ 15 < c < 1$ 或 $0.306\ 85 < c < 1$。

接下来就是计算 c 即 γ 的数值及研究它的性质。

1878 年，我们“见过面”的、海王星发现者之一的英国亚当斯（1819～1892），用他编制的 260 位对数表，算出了小数点后 260 位 γ 值，其中前 6 位是：0.577 215。

1974 年，比尔（W. A. Beyer）和华特曼（M. S. Waterman）用电子计算机把 γ 值算到小数点后 7000 位，发表在 Math. Comp. 28（1974）上。

可是 γ 值的计算却没有计算 π 那么顺利——这个“7000 位”和当时的大约 10 万位 π 值相比，简直不值一提，原因是

没有找到有效的算法、设计出适用于电子计算机的高效软件。

同样不顺利的是，γ 的性质也无法确定——至今数学家们还不能确定它是否像 π 那样是超越数，甚至连它是不是无理数也不知道。

欧拉常数 γ 的用途广泛，许多无穷级数的问题都可以用它解决。例如，利用

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]$$

就可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2,$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1+\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

的收敛区间是 $[-1,\ 1]$。

此外，γ 和 Γ 函数、(雅格布) 伯努利数 B、黎曼函数 $\zeta(s)=1+\frac{1}{2}^{s}+\frac{1}{3}^{s}+\cdots$，都有密切的联系。

使人惊叹的是，德国数学家魏尔斯特拉斯 (Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, 1815～1897)(图 5-15)发现的一个著名等式

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}$$

中，不但有 Γ 函数和 e，而且有欧拉常数 c。这个式子又叫魏尔斯特拉斯标准型 (Weierstrass canonical form)。

1735 (或 1736，1738，1755) 年和 1771 年，欧拉 (图 5-16)右、左眼先后失明，成了一个 “瞎子”。所以，γ 是一个潜入 “瞎子” 的数。



图 5-15　魏尔斯特拉斯

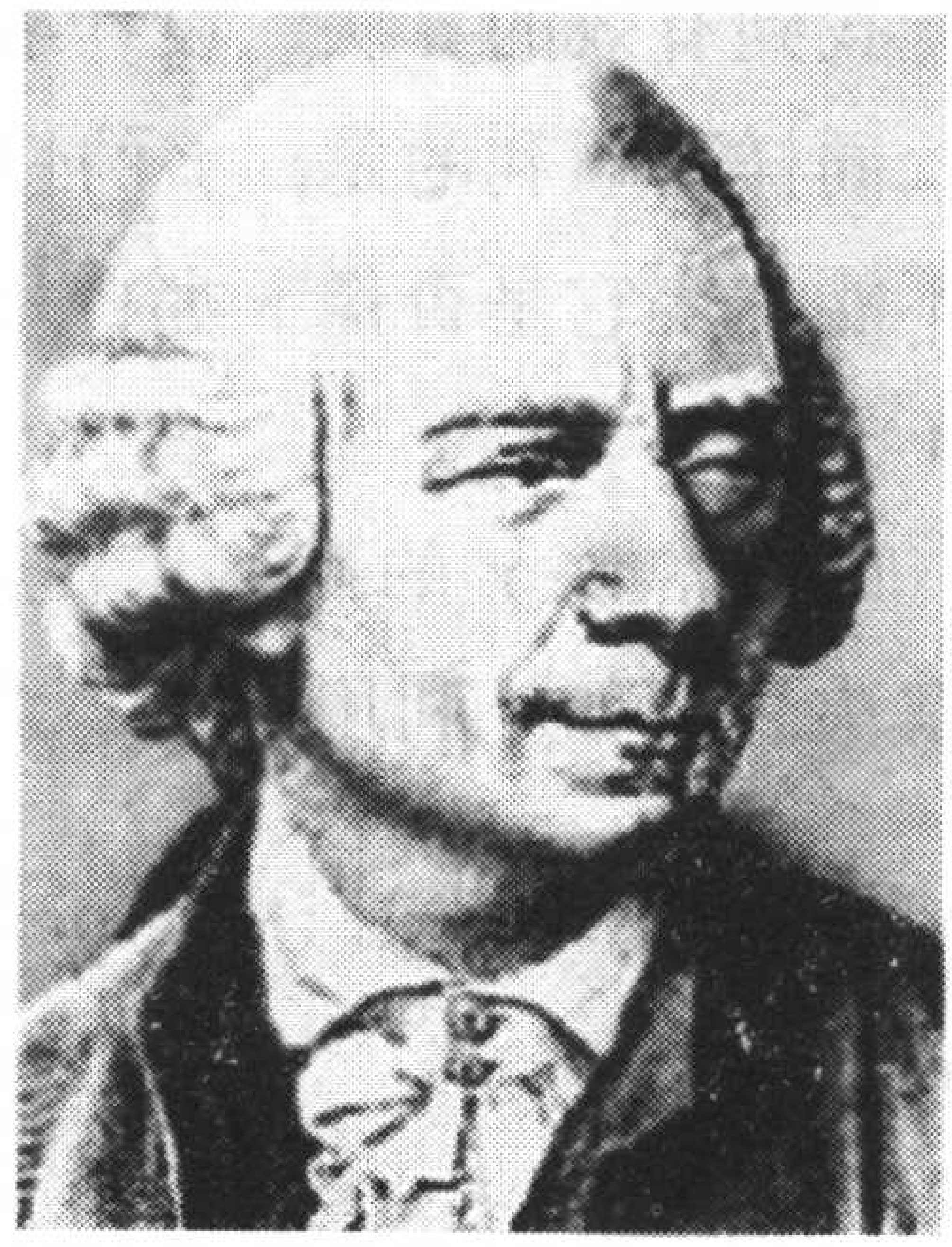


图 5-16　欧拉

但是，可别小看这“瞎子”——他“看不见太阳，却没有堕入黑暗”。欧拉早年的老师约翰·伯努利（1667～1748）在 1728 年给他的信中，就称他是“最善于学习和最有天赋的科学家”，1737 年又把他称为“最驰名和最博学的数学家”。数学家纽曼（J.R.Newman）在 1956 年称欧拉为“数学家之英雄”。

这些评价并非溢美之词或空穴来风。欧拉撰写艰深论文时的“那种轻松自如是难以置信的”——肩上躺着猫，膝上往往抱着婴儿，大一点的孩子则绕膝戏耍。他的著作之多、质量之高、涉及之广，使世界上所有数学家无法颉颃：论文有 856（一说 865）篇，专著有 32（一说 31 部）部。真是“虽万千英雄无往矣”！所以，他和阿基米德、牛顿、高斯并称为“四大数学家”。

比欧拉这些数学贡献更重要的是他的美德。他压下自己的论文不发表，让年轻的法国数学家拉格朗日（Joseph Louis

Lagrange，1736～1813）在 20 多岁时，优先发表自己的成果；他在 1766 年还让贤于拉格朗日当上德国科学院物理－数学研究所所长。这正如英国大文豪莎士比亚（William Shakespeare，1564～1616）所说：“生命短促，只有美德才能把它传到辽远的后世。”

“读读欧拉，他是我们大家的导师！”法国数学家拉普拉斯的这句话，让我们永远记住了这位德才兼备的欧拉。

5.12 这样近似算阶乘——e 与斯特林逼近

1730 年，在棣莫弗（图 5-17）发表的《分析杂论》中，首先对 $n!$ 的一个无穷级数展开式给出近似公式

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}(n/\mathrm{e})^n$$

这个式子也可以写成

$$n! = \sqrt{2n\pi}(n/\mathrm{e})^n \mathrm{e}^{\theta/12n}(式中\ 0 < \theta < 1)$$

或者

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}(n/\mathrm{e})^n$$

它是微分学中几个重要的极限之一。



图 5-17　棣莫弗

这里，我们看到 e 又“莫名其妙”地出现在一个与它“毫不相干”的算式中。但这个式子却被称为“斯特林逼近”，因为棣莫弗的朋友苏格兰数学家斯特林（James Stirling，1692 或 1696～1770）在同年的《微分法或无穷级数的简述》中，也给出了等价的级数

$$\ln(n!) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots$$

这个式子中的系数 $B_2=1/6$，$B_4=-1/30$，$B_6=1/42\cdots$ B_{2k}是（雅格布·）伯努利数。e，π 和伯努利数 B 结伴同行，这也很有趣。

历史的事实是，棣莫弗首先得到的式子是$n! \sim Cn^{n+1/2}e^{-n}$。但是，他只知道式子中的 C 是一个无穷级数之和的极限，却没有把 C 值求出来。而斯特林则利用棣莫弗的发现做了进一步探讨，不但求得了 $C=\sqrt{2\pi}$，还求得了前 5 个系数，并给出了一个决定后面系数的递推公式。

由此可见，棣莫弗和斯特林对确立这个公式都起了重要的作用，但“首功”当归棣莫弗。

棣莫弗是一位传奇数学家——他的逝世就是一个具有数学色彩的传奇故事。在临终前的若干天，他特意每天比前一天多睡 10～15 分钟，这样每天睡的时间就构成了一个等差数列。当这个等差数列的某一项达到 24 小时的时候，这位“神机妙算”的数学家就微笑着长眠不醒了，因为不可能一天内睡眠的时间会超过 24 小时。真是“滚滚红尘”，难掩他对数学的痴迷。

斯特林不但给出了级数的前 5 个系数，还给出了决定后面系数的递推公式。他只用了级数的前几项，就算出了常用对数 lg(1000!)等于 2567 加上一个精确到小数点后 10 位的小数，进而求得 1000! 的近似值。下面我们来看如何利用斯特林逼近来进行阶乘的近似计算。

由公式有

$$1000! = \sqrt{2 \cdot 1000\pi} \cdot \left(\frac{1000}{e}\right)^{1000} = 79.27 \cdot 367.88^{1000}$$

等式两边取常用对数，就有 $\lg(1000!) = 2567.7$。由此可知，1000! 是一个 2568 位数，这也是斯特林当年得到的结果。

由此可见，要计算很大的数的阶乘值，受位数限制而不能用电子计算器直接算出时，可以用这一公式近似地求出。

5.13 自然数“切蛋糕”——“整数分拆”也要靠 e

在数论的解析数论这个分支中，又有一个叫堆垒数论即加性数论的小分支。堆垒数论中的一个著名问题是整数分拆。

什么是分拆（partition，《自然辩证法通讯》1982 年 3 期 57 页称为“分析”）呢？把任意自然数 n 分成若干个自然数的和，就称为“n 的一种分拆”。通常，用 $p(n)$ 来表示 n 的所有不同的分拆的个数——称为“分拆数”(number of partitions)。分拆的规则是，不计被加的数的顺序，并允许重复出现。问有多少种分法。这就与“切蛋糕”类似——按照一定的规则，一块蛋糕有多种切法。

例如，当 $n=2$ 时，分法只有 $2=1+1$ 这一种，即 $p(2) = 1$。又如，当 $n=5$ 时，分法有 $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$，即 $p(5) = 6$。在这两个例子中，有的人把 2 和 5 本身也算做一种，这样 $p(2) = 2$，$p(5) = 7$。

当然，我们可以按照这两个例子的方法进行实际分拆，从而求得 n 的 $p(n)$。

但是，我们很快就会发现，对于较大的 n，这样做非常困

难。例如，当 $n=10$ 时，$p(n)=42$；而当 $n=100$ 时，$p(n)=190\ 569\ 292$，因此，现在的问题是有没有什么方法能较快得到 $p(n)$，或者问：有没有计算 $p(n)$ 的公式?

由于 $p(n)$ 等于 n 阶对称群的共轭类的个数，并与该群的表示理论密切相关，所以非常有趣，也引来“无数英雄尽折腰”。

1848 年，欧拉给出了一个恒等式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{(n/2)(3n-1)}+x^{(n/2)(3n+1)}\right)$$

由于这个恒等式中的 $\left(\frac{n}{2}\right)(3n-1)$ 是“五角数”(pentagonal number)，所以该恒等式称为“五角定理”。所谓“五角数”，又叫“五角形数”或“五边形数”，是这些数目的点子可以排成像图 5-18 的五边形。

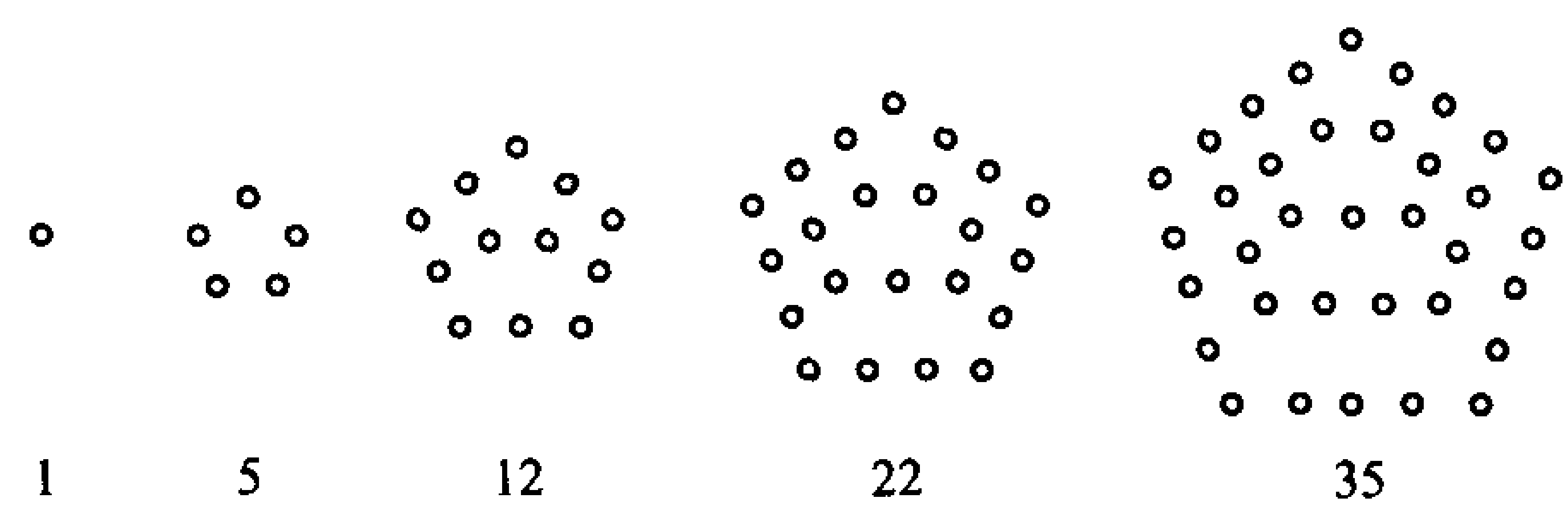


图 5-18 头 5 个五角数 1，5，12，22，35 的点子排成的五边形

五角数是“角形数”中的一种。有关角形数研究，还有一段趣闻呢!

原来从古希腊毕达哥拉斯学派开始，就在研究三角数、四角数、五角数等“角形数”，高斯也是“爱好者”之一。1796 年7月10日，高斯在他的日记上写道：

ΕΓΡΗΚΑ! mun = △ + △ + △

这里，ΕΓΡΗΚΑ 是希腊文“知道了”的意思——当年阿基米德

在洗澡时发现浮力定律后，赤身裸体地跑到大街上疯喊的话。由此可见高斯得到这个式子的狂喜之情。

高斯得到的是个什么式子，从而狂喜呢？原来，西文“num”是“数”的缩写，“△”表示“三角数”。这就是说，高斯找到了“自然数可以表示成 3 个三角数的和”的证明，当然应该像阿基米德那样疯狂一回。后来，他还证明“自然数可以表示成 4 个四角数的和”。

但是，接下来的研究仅限于初等方法，没有引入实质性的分析学思想，只能频繁地计算较小整数的分拆数。

首先在这方面研究取得重大突破的是英国数学家哈代和印度传奇数学家拉马努金。1918 年，他们联名发表了《组合分拆的渐近公式》(Asymptotic formulae in combinatory analysis)，借助于一个了不起的恒等式证明了可以选择适当的正数 A 和 B，使得

$$\left(\frac{A}{n}\right)e^{2\sqrt{n}} < p(n) < \left(\frac{B}{n}\right)e^{2\sqrt{2n}}(\text{其中 } n \geqslant 1)$$

成立。

拉马努金和哈代还应用了一种新的分拆方法——“圆法”，求出哈代－拉马努金公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n}e^{\pi\sqrt{2n/3}}$$

看，e 在这些式子中，又披着神秘的面纱奇迹般地出现了！

利用哈代－拉马努金公式，用 8 项就能求出 $p(200)$ 的值，误差仅为 0.004。

1937 和 1943 年，出生在德国的美国数学家拉德马赫尔 (Hans Adolph Rademacher，1892～1969) 给出了更准确的 $p(n)$ 公式

$$p(n)=2\sum_{q=1}^{\infty}\sqrt{q}L_q(n)(u_q-v_q)$$

其中

$$u_q+v_q=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{sch}\frac{k\lambda_n}{q}\right)$$

$$\lambda_n=\sqrt{n-1/24},\ |L_q(n)|<2q^{5/6}$$

1954 年，拉德马赫尔又进一步利用整函数

$$L_v(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(v+n+1)}$$

得到 $p(n)$ 更准确的级数展开式

$$p(n)=2\pi\left(\frac{\pi}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{-5/2}L_{3/2}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{12k}\right)^2(24n-1)\right]$$

并用所谓“Ford 圆”当作积分周线，给出了极其巧妙的证明。

1942 年，中国数学家华罗庚（1910～1985）用拉马努金和哈代的方法，及拉德马赫尔的无穷级数法里的分割法，证明了

$$p(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(h,k)=1}\omega_{h,k}\mathrm{e}\left(-\frac{hn}{k}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}J_0\left(\frac{i\pi}{k}\left(\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{24}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

其中 $2\nmid k$，$0<h\leqslant k$，J_0（x）为 0-级贝塞尔函数。

匈牙利数学家厄尔多斯（1913～　）在 1942 年、数学家纽曼（D.J.Newman）在 1951 年、苏联数学家波斯特尼科夫（А.Г.Постников），都利用初等函数论的方法证明了

$$p(n)=\frac{1}{4\sqrt{3}n}\mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}}\left[1+O\left(\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}\right)\right]$$

这里 $O(n)$ 表示 n 次正交（变换）群。

这些公式中都含有 e。

把五角定理的两端乘以 $p(n)$ 的母函数，并比较系数，就可以得到

$$\sum_{0\leqslant\omega_k\leqslant n}(-1)^{k-1}p(n-\omega_k)=0$$

其中 $\omega_k=(k/2)(3k-1)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 就是前面提到的五角数。

利用这个公式，就可以逐次求出 $p(n)$ 的值。事实上，在 1916 年，英国计算专家、数学家马克马洪（M.Percy Alexander MacMahon，1854～1929）用了一个月的时间，就用它算到 $n=200$的 $p(200)$ 值——一个 13 位数 3 972 999 029 388。后来，人们又算出 $p(200)$ 是一个 22 位数。

分拆问题可以引出许多趣味数学问题，有许多难解之谜至今仍在研究之中。把一个自然数分拆成若干个连续自然数之和，就是趣味数学问题中的一个。例如，605 就有以下 5 种分拆法：302+303，119+120+121+122+123，56+57+…+65（共 10 个数），50+51+…+60（共 11 个数），17+17+…+38（共 22 个数）。

不但数论中的分拆问题如此，数论这个"数学皇后"（高斯语）中的许多问题也是难解之谜。正如日本数学家弥永昌吉（Iyanaga Shôkichi，1906～）所说："这个理论的大部分仍然笼罩在神奇的面纱之下。"

然而，由于数论是"其他科学的典范"，是"数学知识的永不枯竭之泉，并且对其他一切领域的研究提供了不断的刺激。"（希尔伯特语）所以至今仍然是数学家们研究的"热点"和重点，例如著名的"1+1"就是其中的一个。

5.14 对数正态分布——概率计算中的 e

把长 10cm 的尺子放在面前，一边目测尺子，一边从一卷钢

丝上切下一根根 10cm 长的钢丝。

开始切下的 100 根，长短不一，误差较大。当切下的数目不断增加，200 根，400 根，800 根……时，切下的钢丝的长度基本上就会以某个值为中心，其他值就会分布在这个值附近。

设切下的钢丝长度为 x 厘米，x 是个概率变量。测量切下来的钢丝长度是个实际问题，希望测量精度很高比较困难，因此一般将测量理想化，把 x 取为连续变量，x 可取 10 附近一切实数值。

这样的概率变量叫“连续概率变量”。

此外，像物体的个数或现象发生的次数是一些离散的数值，取离散值的概率变量叫“离散概率变量”。

连续概率变量 x 可以取多种值，因此很难说取某个特定值的概率是多少，并认为那种概率为 0，因此一般分析连续概率变量的概率分布时，不使用等式 $x=a$，而用不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 来描述，即一般分析 $p(a \leqslant x \leqslant b)$ 是多少。

人的智商指数也可看为连续概率变量。

表 5-2 是对 1000 个学生智商调查结果的智商密度分布表。

表 5-2

智商指数 x	密度/个	相对密度/%
54.5~64.5	3	0.3
64.5~74.5	21	2.1
74.5~84.5	90	9.0
84.5~94.5	295	29.5
94.5~104.5	330	33.0
104.5~114.5	201	20.1
114.5~124.5	54	5.4
124.5~134.5	5	0.5
134.5~144.5	1	0.1
合　计	1000	100

图5-19是由表5-2绘制的智商密度分布的直方图和折线图。各区间细长的长方形面积代表相对密度。

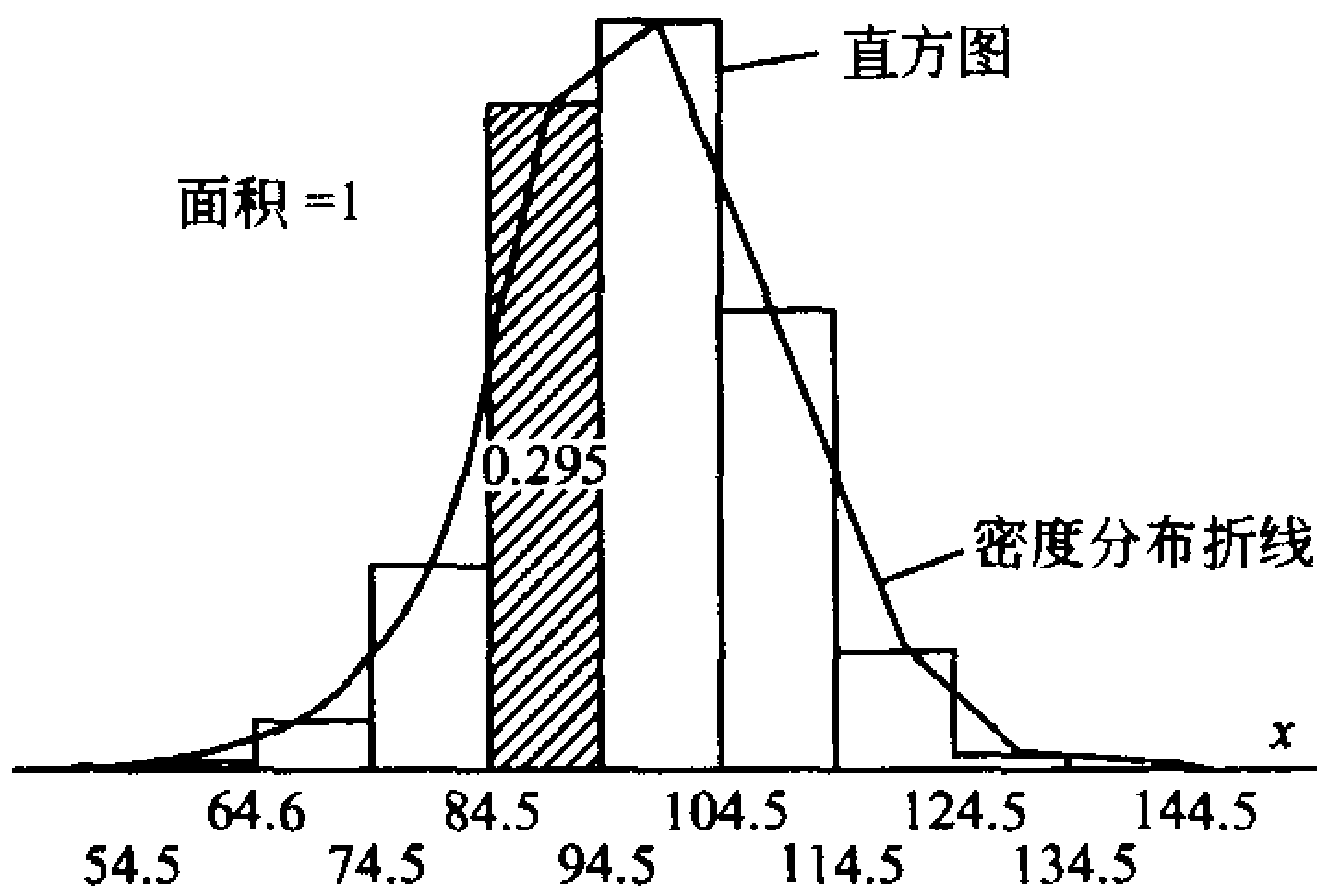


图5-19

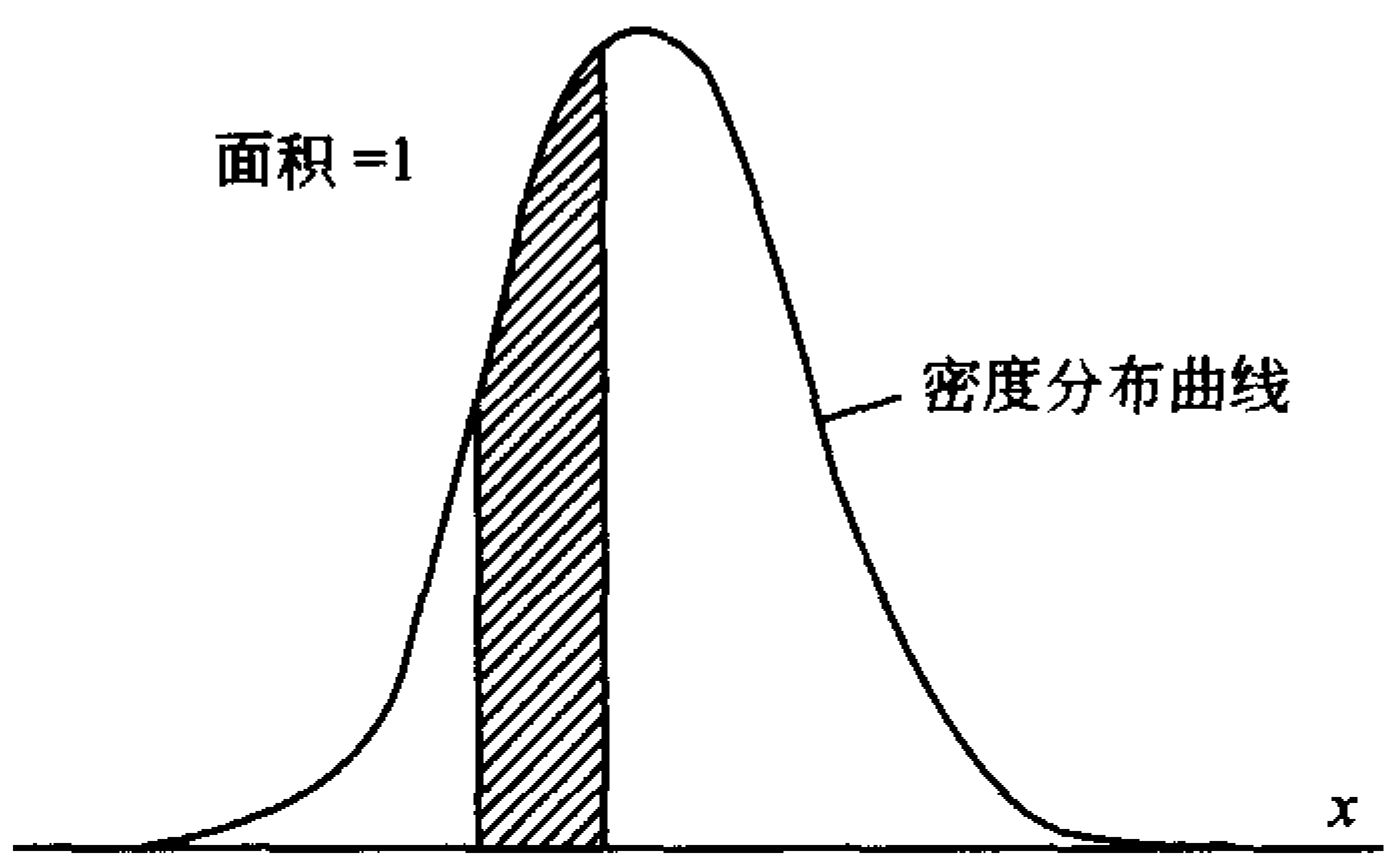


图5-20

图5-20是将图5-19中折线平滑后所得的密度分布曲线。

当被调查的学生人数不断增加时，就会变成图5-21那样的左右对称的"山形"或称"吊钟形"光滑曲线。这种分布曲线叫"正态分布曲线"，是连续概率变量分布曲线的代表。以身高、体重等为代表的很多自然现象和社会现象的分布曲线就属于这种情形。

这种分布曲线可以用高斯正态分布公式

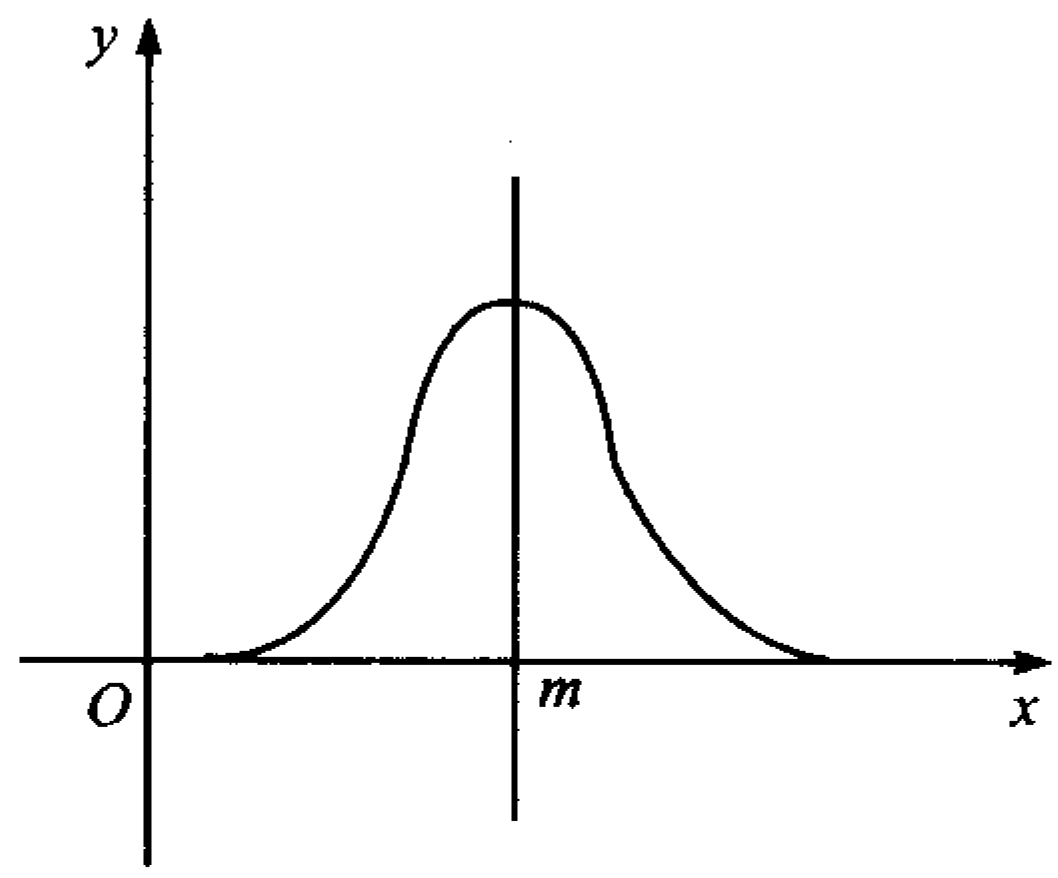


图 5-21

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

来描述，其中 $x \in \mathbb{R}$；a 是平均值，σ 是标准误差，σ^2 是方差，它们都是常数，且 $\sigma<0$。你看，e 在这里出现了。

在早期研究古典概率论的数学家中，意大利塔尔塔利亚（Niccolò Tartaglia，约 1499～1557）和卡尔达诺（Girolamo Gardano，或 Jerome Cardan，1501～1576），法国费马、帕斯卡、拉普拉斯、棣莫弗、布丰（Count（或 Comte）de Buffon，又名勒克朗谢：George（或 Georges）Louis Leclerc，1707～1788）和泊松（Poisson Siméon-Denis，1781～1840），荷兰惠更斯，瑞士雅格布·伯努利和尼古拉·伯努利（第三）（Nicolas Bernoulli，1695～1726），英国斯特林和辛普森（Thomas Simpson，1710～1761），德国高斯等，都做出过重要贡献。

其中棣莫弗用 $n! \sim \sqrt{2n\pi}\ (n/\mathrm{e})^n$ 这个逼近式研究了二项分布的极限式，最终得到 n 次试验中出现 m 次事件的概率之期望值满足的关系式

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{x_1 < \frac{m(n)-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} < x_2\right\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

式中 $m(n)$ 是 n 次试验中出现 m 次事件的概率。也就是说，棣莫弗首次发现二项分布的极限形式是一个正态分布。显然，这里又有 e。

棣莫弗还首次处理了概率积分

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

得到形如

$$f(x) = ce^{-hx^2}(c, h \text{ 都是常数})$$

的结果。此式可具体化为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}。$$

这就是著名的"正态密度函数"公式。

遗憾的是，棣莫弗的工作被人遗忘了两个世纪。直到 1924 年，英国数学家、生物统计学的奠基人皮尔逊（Karl Pearson，1857～1936）的著作《正态曲线史》（Ahistory of the normal curve）重提棣莫弗的工作，人们才认识到他的贡献和价值。

此外，随机变数 ξ 的密度函数是

$$f(x) = \frac{\lg e}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

这个式子中也有 e 的身影。在这个式子中，若 $x>0$，$\sigma>0$，μ 是常数，则称 ξ 服从"对数正态分布"，若 $x\leqslant 0$，则 $f(x) = 0$。



图 5-22　柯尔莫哥洛夫

在近现代的概率论研究中，俄国或苏联的切比雪夫、马尔科夫（Андрей Андреевич Марков, 1856～1922）、伯恩斯坦（Сергей Натанович Бернштейн, 1880～1968）辛钦（Александр Яковлевич Хинчин, 1894～1959）和柯尔莫哥洛夫（Андрей Николаевич Колмогоров, 1903～1987）（图 5-22），日本伊藤清（Kiyosi Ito, 1915～）、美国卡尔曼（Rudoif Emile Kalman, 1930～）、中国侯振挺（1936～）等数学家，都做出了重要贡献。

其中柯尔莫哥洛夫于 1933 年把概率论建立在集合论的基础之上，完成了现代意义上严格完整的概率论公理体系。

出生后 10 天就失去母亲的柯尔莫哥洛夫，是被他的两个姨妈薇拉（Вира）和娜捷日达（Надежда）收养长大的。她们努力引导他对书本和自然的兴趣，开拓他的好奇心，例如带他去田野、森林旅游，讲花草树木、宇宙星星，讲安徒生童话……让年仅五六岁的柯尔莫哥洛夫负责家庭杂志《春燕》的数学部分。被激励的这个“小小幼年”，在五六岁的时候，就发现了$1=1^2, 1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，……并发表在《春燕》上……

柯尔莫哥洛夫最终成为 20 世纪最伟大的数学家之一。他的姨妈们教育的成功，给我们当代从事“应试教育”的人以许多难忘而深刻的启示。

5.15 “双曲”与“三角”——这里也有 e

在数学中，有一类由计算双曲线下的面积

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2 - a_2}\mathrm{d}x$$

引出的函数，叫双曲函数（hyperbolic function）。

第一个全面研究双曲函数的是德国数学家兰伯特。1768年，他在一篇关于虚角三角函数的论文中研究了这种曲线，指出圆弧下面的面积

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

与双曲线下的面积相比，明显看出积分表示式中只相差一个符号——这也是当时许多数学家注意到的事实；而且前者可以用三角函数表示，后者又和对数函数有关。

那么，在三角函数和对数函数之间就应该有一种含有虚数的对应关系。兰伯特经过全面深入的研究后，引进了双曲正弦函数和双曲余弦函数，为当时的函数增加了新的“另类”。

至今，人们已经构造出以下 6 种双曲函数（各自的图像见图 5-23）：

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x = \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$,

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x = \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$,

双曲正切函数 $\mathrm{th}x = \tan x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$,

双曲余切函数 $\mathrm{cth}x = \coth x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$,

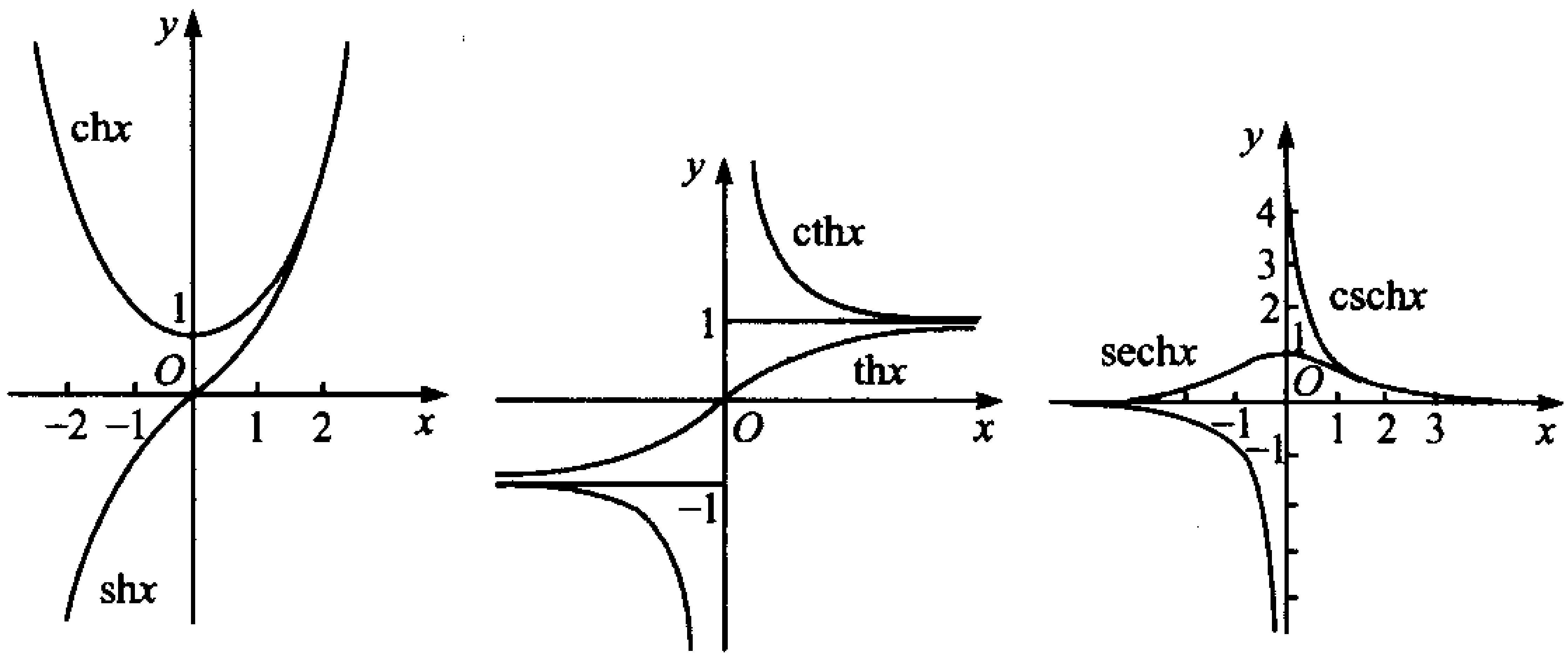


图 5-23

双曲正割函数 $\text{sech}x = 1/\text{ch}x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$,

双曲余割函数 $\text{csch}x = 1/\text{sh}x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$。

看，在这些充满和谐和对称美的式子之中，都有 e!

双曲函数在工程技术中有着广泛的用途，特别是前面 3 个。

那么，双曲函数又怎么会和 e“联姻结盟”呢?

我们首先来看一看双曲函数是怎么定义的。

在图5-24中，设双曲角 t 是单位双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的半

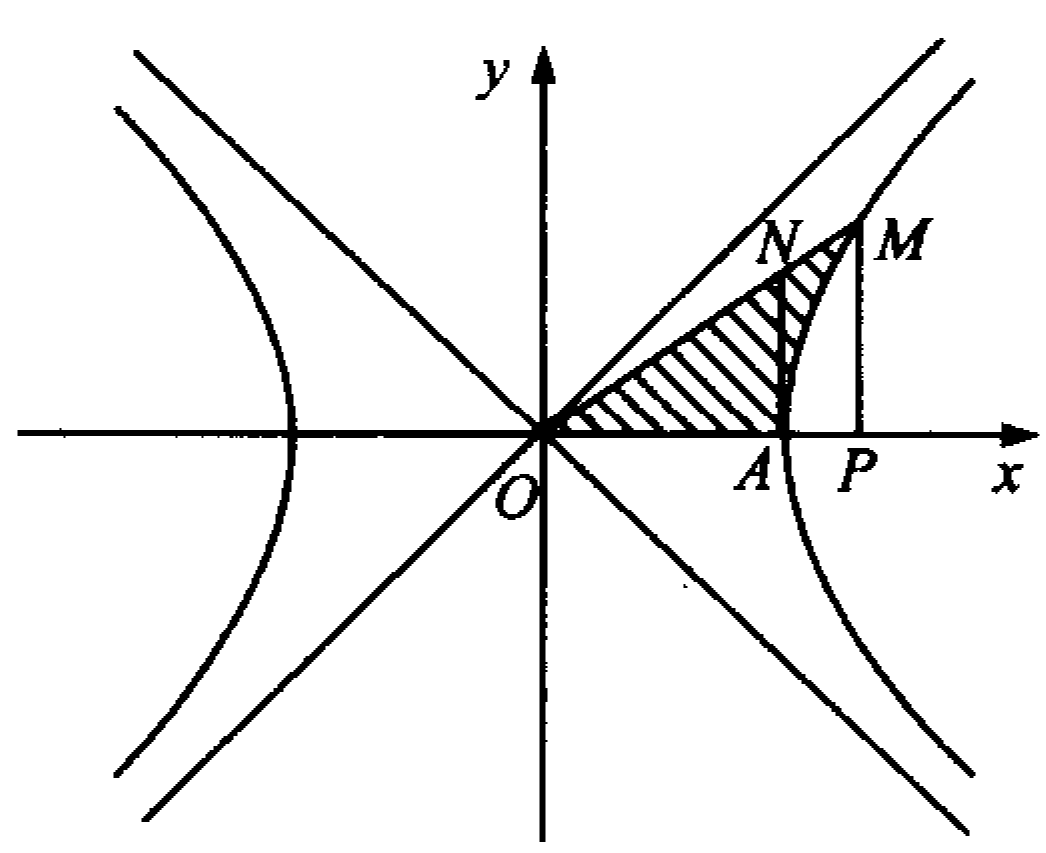


图 5-24

径 OA 和 OM 与双曲弧 $\overset{\frown}{AM}$ 之间那个扇形面积 S 的两倍。过 A 作这条双曲线的切线，交 OM 于 N，则 PM，OP，AN 等分别称为双曲正弦线、双曲余弦线、双曲正切线等，于是 PM，OP 和 AN 的数量，就分别定义为双曲正弦 $\operatorname{sh}t$、双曲余弦 $\operatorname{ch}t$、双曲正切 $\operatorname{th}t$……

设 M 的坐标是（x，y），并利用不定积分公式

$$\int \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$$

就可以算出

$$\begin{aligned} S &= \triangle OMP\text{ 的面积} - \text{曲边 }\triangle AMP\text{ 的面积} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(x+y) \end{aligned}$$

这样就有

$$t = 2S = \ln(x+y)$$

和

$$\begin{aligned} -t = -\ln(x+y) &= \ln\left[\frac{1}{(x+y)}\right] \\ &= \ln\left[\frac{(x^2-y^2)}{(x+y)}\right] = \ln(x-y) \end{aligned}$$

由 $t=\ln(x+y)$ 和 $-t=\ln(x-y)$，就分别得到

$$x+y=\mathrm{e}^t$$

和

$$x-y=e^{-t}$$

进而得到

$$x=\frac{(e^{t}+e^{-t})}{2}$$

和

$$y=\frac{(e^{t}-e^{-t})}{2}$$

这样就得到

$$\mathrm{sh}t=PM=y=\frac{(e^{t}-e^{-t})}{2};$$

$$\mathrm{ch}t=OP=x=\frac{(e^{t}+e^{-t})}{2};$$

$$\mathrm{th}t=AN=OA\cdot\frac{PM}{OP}=\frac{1\cdot\left[\frac{(e^{t}-e^{-t})}{2}\right]}{\left[\frac{(e^{t}+e^{-t})}{2}\right]}$$

$$=\frac{(e^{t}-e^{-t})}{(e^{t}+e^{-t})}$$

式中的“1”是 OA 的长：当 $y=0$ 时，由 $x^2-y^2=1$ 算出 $x=\pm1$中的正值；

……

这样，双曲函数就和 e“联姻结盟”了。

双曲函数的反函数是反双曲函数，其式子中当然也包含 e。下面我们写出其中 4 个：

$$\mathrm{sh}^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\mathrm{ch}^{-1}x=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\mathrm{th}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\mathrm{cth}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

有趣的是，利用欧拉公式 $e^{ix}=(\cos x+i\sin x)$，把 6 个三角函数用指数函数（或复数的指数式）表示出来的时候，会发

现它们的“样子”分别和上面的 6 个双曲函数惊人地“相似”但却又有不同：

正弦函数 $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，

余弦函数 $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$，

正切函数 $\tan x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{ie^{ix}+ie^{-ix}}$，

余切函数 $\cot x=\dfrac{ie^{ix}+ie^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$，

正割函数 $\sec x=\dfrac{2}{e^{ix}+e^{-ix}}$，

余割函数 $\csc x=\dfrac{2i}{e^{ix}-e^{-ix}}$。

此外，双曲函数之间的 5 个关系式也是很有趣的——和三角函数之间的 5 个关系式“类似”：

$(\mathrm{ch}x)^2-(\mathrm{sh}x)^2=1$，$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$，$\mathrm{cth}x=\dfrac{1}{\mathrm{th}x}$，和前面的 $\mathrm{sech}x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$，$\mathrm{csch}x=\dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$。

当然，双曲函数和三角函数也有不同——前者不像后者那样有周期性。

5.16 英国海疆长几何——分形公式中的 e

1967 年，出生在波兰（另有法国和立陶宛两说）的美国哈巴多大学数学教授伯努瓦·曼德尔·布罗特（Benoit B.Mandelbrot 或 Benoit Mandel Brot，1921～），在英国《科学》杂志上，发表了一篇名为《不列颠的海岸线有多长》的论文。

真是太奇怪了，难道这么多年来堂堂“大英帝国”还没有

把自己的海疆长度搞清楚么！

是的，而且这还是一个不容易“搞清楚”的问题。

因为海岸线和平直的线条不同，它不但高低不平，而且弯弯曲曲，还有河流入海、山峦矗立。一言以蔽之：地形复杂。在这种情形下，测量者的“尺子”不可能把每个细节都测量得清清楚楚，只是用一些粗略的“直尺子”来近似测量。所用的尺子不同，得到的长度就不同——尺子越小，长度越大。例如，用100米长尺子测量，小于100米的那些“弯弯曲曲”的海岸线就被忽略；而用10米长尺子测量，小于10米的那些“弯弯曲曲”的海岸线才会被忽略。就像在示意图5-25中的那样，M和N之间的海岸线长，用不同的尺子测量，就得到$b+c+d+e>a$的结果。

事实上从19世纪开始，英国人每次测量的长度都不一致。

1977（一说1975）年，布罗特又在他出版的《分形：形、机遇与维数》一书中写上了这个有趣的问题。从此他提出的“分形（Fractal）”概念和理论开始广为流传并引起数学家们的深入研究。

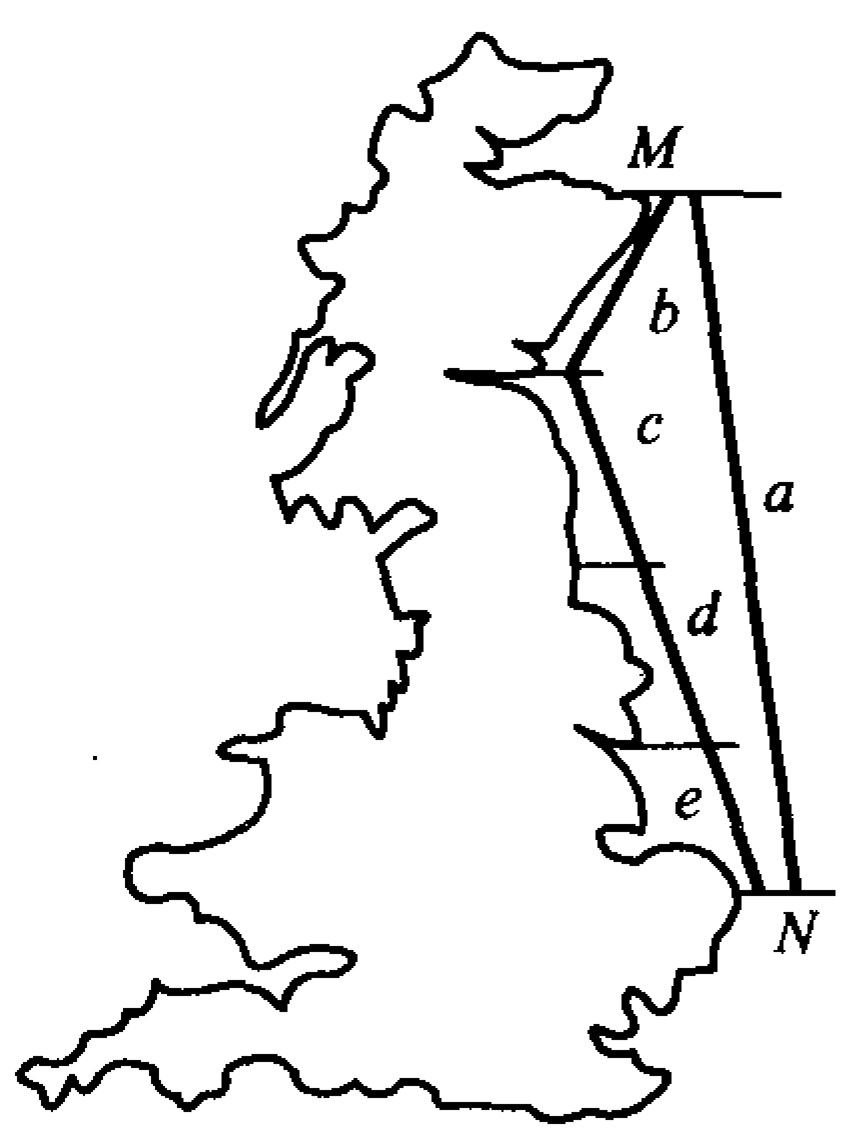


图5-25　大不列颠的海岸线有多长

那么，什么是分形？分形和e又有什么关系呢？

分形是这样一种图形，将它的细微部分放大后，其结构看起来仍与原先的形状精确地一致。图5-26所示著名的雪花曲线（也称科赫曲线）就是这样一种图形。这与圆成了鲜明的对比——把圆的一部分放大后，便变得比较平直。这是分形的第一个特点，

也是分形区别于欧几里得几何图形的第一点。

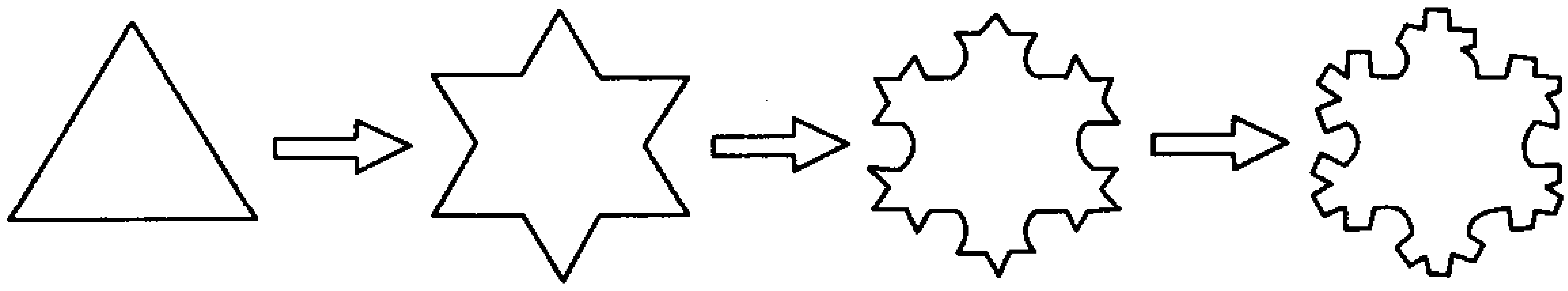


图 5-26 雪花曲线的形成

这里提到的黑尔格·冯·科赫（Helge von Koch，1870～1924）是瑞典数学家。在 1904 年，他首先创造了这条以他的姓氏命名的连续曲线。这条曲线没有边界，自身不相交，围成的面积也是有限的，但无限做下去的时候，却有无限长。

在欧几里得几何中，点、直线、平面、立体分别是 0，1，2，3 维的，而一条锯齿状的分形曲线（例如雪花曲线）的维数（也称“维度”）则在 1 和 2 之间。如果像图 5-27 那样从一个 2 维的矩形开始，把它分为 4 个部分，再在它的中间部分的上方构造一个“金字塔”，并继续进行这样的分形，那么这个分形的维数就在 2 和 3 之间。这种有“分数维”的情形，是分形的第二个特点，也是分形区别于欧几里得几何图形的第二点。

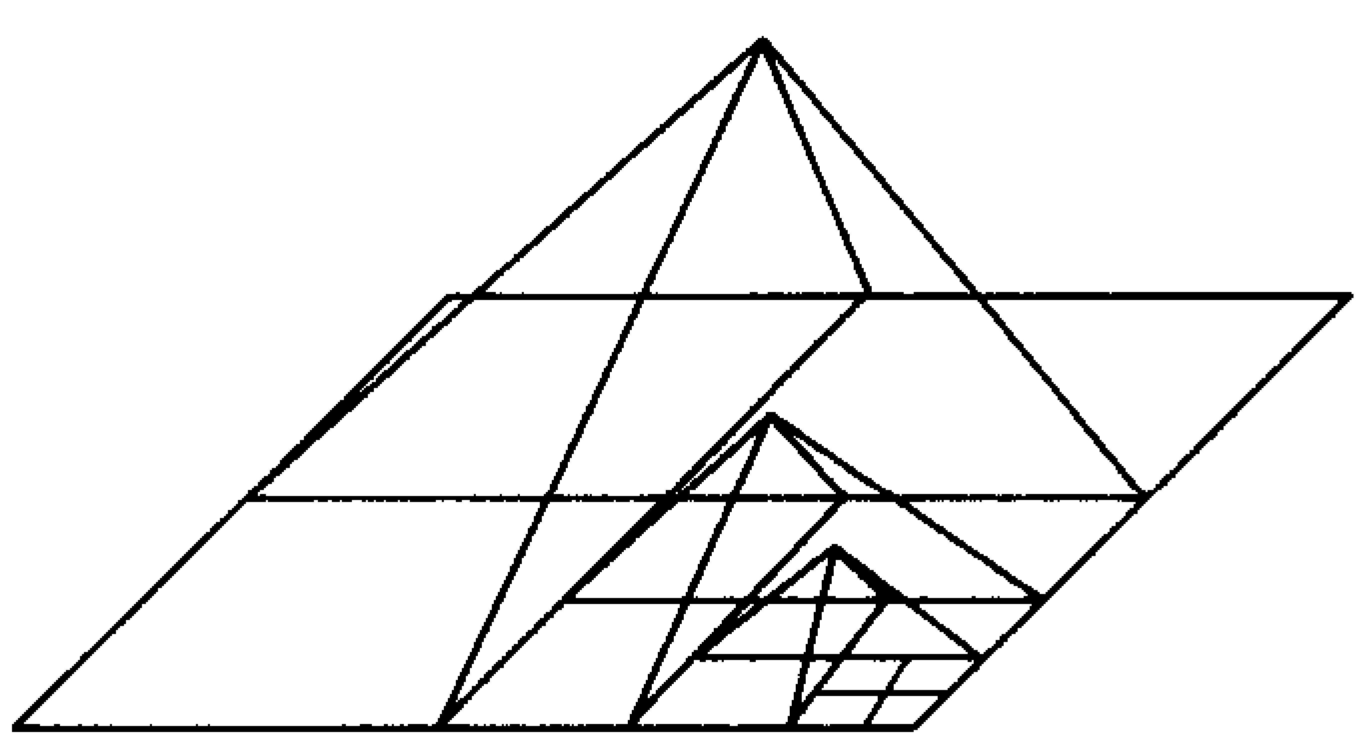


图 5-27

分数维这个概念，是德国数学家豪斯多夫（Felix Hausdorff, 1868～1942）在 1919 年首先提出来的。

原来，分形理论引出了一个分数维的问题。

那么，什么是“分数维”呢？我们以雪花曲线为例加以说明。这里，介绍与分形关系密切的又容易理解的“相似维数”。粗略地说，如果某个图形是由 a^D 个全部缩小到$\frac{1}{a}$的相似图形组成的，则 D 称为相似维数。

下面用计算雪花曲线的分数维来具体说明。假设经过 n 步变换的雪花曲线的每条边的长是 $m=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，那么 $n=\frac{-\ln m}{\ln 3}$；而此时雪花曲线的总长就是 $N(m)=4^n=4^{\frac{-\ln m}{\ln 3}}$。这样就得到

$$\ln N(m)=\left(\frac{-\ln m}{\ln 3}\right)\ln 4=\left(\frac{-\ln 4}{\ln 3}\right)\ln m$$

$$=\ln m^{\frac{-\ln m}{\ln 3}}=\ln m^{-D}$$

从 $\ln m^{\frac{-\ln m}{\ln 3}}=\ln m^{-D}$就得到雪花曲线的维数$D=\frac{\ln m}{\ln 3}=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1.261\ 859\cdots$

一般地说，如果 p（例如上面例子中的 4）是图形的放大倍数，而 q（例如上面例子中的 3）是边长的放大倍数，那么分形曲线的分数维数 $D=\frac{\ln p}{\ln q}$。

看，计算分形图形的分数维数，也要用到 e。

那么，英国的海岸线究竟有多长呢？这个长度是不定的——随标度不同而异。如果标度无穷小，海岸线也“无限曲折”——像无限做下去的雪花曲线那样，那么海岸线的长度就是无穷大。当然，在实际上这两者都不可能实现。

有限国土的海疆在理论上可能无限长，这个结论是正确的，因此这是一个有趣的"悖论"——"布罗特悖论"。

5.17 积分方程的滥觞——拉普拉斯变换和 e "结盟"

"我们知道的，是很少的；我们不知道的，是无限的。"你知道这句流传至今的名言，是谁说的吗？

这是拉普拉斯（图 5-28）在 1827 年 3 月 5 日临终时的遗言。

1782 年，拉普拉斯研究过函数 $g(t)$ 的积分方程

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-xt}g(t)\mathrm{d}x \tag{5.15}$$



图 5-28　拉普拉斯

这个方程称为 $g(t)$ 的拉普拉斯变换。

1823 年，法国数学家泊松给出了（5.15）式中 $g(t)$ 的表达式

$$g(t)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}e^{xt}f(x)\mathrm{d}t \tag{5.16}$$

其中 a 是充分大的实数。

你看，e 就出现在（5.15）和（5.16）式之中了。

著名的拉普拉斯变换是求解常微分方程、偏微分方程、积分方程和差分方程的一种基本方法。对满足一定条件的复值实函数 $f(t)$（其中自变量 t 是实数，函数值可以是复数），经过拉普拉斯变换之后的函数 $L(s)$（其中 s 是实部为正值的

复数）为

$$L(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

它的逆变换是

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C L(s)e^{st}ds$$

其中 C 是 s 平面上的某个闭路。

你看，这两个式子中也都有 e 的芳踪。

我们熟悉的拉普拉斯，在研究了 20 多年的天体力学之后，于 1799（第一、二卷）、1802（第三卷）、1805（第四卷）、1825（第五卷）出版了巨著《天体力学》。这部五卷本的巨著，汇集了自牛顿以来的全部天体力学的成就，被誉为那个时代的《至大论》，他也因此被誉为“法国的牛顿”。

《天体力学》轰动了西方世界，连日理万机的皇帝拿破仑一世（Napoléon Bonaparte，1769～1821）也有兴趣问拉普拉斯，您在书中为什么没有提到众生顶礼膜拜的“上帝”？拉普拉斯直截了当地回答说：“我不需要这种假设。”这次短短的对话，折射出拉普拉斯信奉唯物主义的光辉。

拉普拉斯还有一段趣闻给后人以深刻的启示。他 18 岁在开恩大学学习数学毕业后，要找工作。就携知名人士的推荐信只身前往巴黎，拜见已声名远播的法国数学家达朗贝尔（D' Alembert Jean Le Rond，1717～1783）。可惜达朗贝尔对这类推荐信一律不感兴趣，将他拒之门外。

但是，碰壁的拉普拉斯并没有灰心，他回到住所，提笔就力学的一般原理给达朗贝尔写了一封十分漂亮的信。这封信引起了达朗贝尔的重视——他很欣赏拉普拉斯在论文中反映出来的才华，就回了一封热情洋溢的信，说：“你用不着别人介绍，

你自己就是很好的推荐信……”。此后，经达朗贝尔推荐，拉普拉斯做了巴黎军事学校的数学教授，开始了自己一生的事业。

从这个故事可见，实力是求职天平上最重的砝码，找人介绍只是机遇，也许今天求职的人们能从中得到启迪。

由于拉普拉斯把“无穷小精神”带到工作中去，是位不称职的大臣。仅仅过了 6 个月，拿破仑就把他的内务大臣撤了。对此，拿破仑在被流放到圣赫勒拿岛期间还说：“拉普拉斯是第一流的数学家，但事实很快表明他不过是一位平庸的执政官……他从不认真对待任何事情，而是到处寻找可乘之机。他没有可以信赖的思想，并终于把无穷小精神带进了政府之中。”

当然，人无完人。拉普拉斯在尔虞我诈的政治斗争中，极力奉承拿破仑，以保住自己的“高官厚禄”，作为科学家，这是不足取的。

拉普拉斯是较早研究积分方程的人。当然，积分方程作为一种理论，则是在19世纪初由挪威数学家阿贝尔（Niels Henrik Abel, 1802～1829）（图5-29）开创的。他在 1823 年的论文中，研究地球引力场中的一个质点下落轨迹问题时，归结为从方程（后来人们称为阿贝尔方程）

$$f(x) = \int_0^x \frac{v(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\mathrm{d}\xi$$

中确定函数 v。他用一种比较特殊的方法求出了 v，但他的工作长期没有引起他访问的数学大国——法国和德国的数学家们的



图 5-29　阿贝尔

重视，于是只好黯然回到祖国。

1829年4月6日晨，年仅26岁的数学天才阿贝尔在贫病交织中寂寞地离开人世，灵柩被安葬在他去世时的佛罗兰德教堂边的墓地里。

三天后的4月9日，阿贝尔生前的主要合作者、法国数学家克雷尔（Augusf Leopold Crelle，1780～1855）迟到的信件才到达阿贝尔家中，所附柏林大学的聘书中写着："尊敬的阿贝尔先生：本校聘请您为数学教授，望万勿推辞为幸。"

然而，这一切都为时已晚。

阿贝尔最后的日子是在一个英国人的家中度过的，因为他的未婚妻肯普（Kemp）小姐是这家的家庭教师。

阿贝尔知道今生今世无法与肯普比翼齐飞，但仍然牵挂着她的归属和前途，于是写信给他最好的朋友基尔豪（Kielhau）："她并不美丽，有着一头红发和雀斑，但她是一个可爱的姑娘。"虽然基尔豪和肯普此前从未谋面，但阿贝尔却希望他们能相识相知相恋。肯普一直守护在骨瘦如柴的阿贝尔身旁，坚持一个人独自照看他的最后几天，要"独占这最后的时刻"。

在阿贝尔的葬礼上，肯普与专程赶来的基尔豪相遇了。基尔豪帮助她克服了失去恋人的悲伤。如阿贝尔所希望的那样，他们相爱并喜结连理。婚后两人十分幸福，也常到阿贝尔墓前凭吊昔日的好友。

随着岁月的流逝，肯普和基尔豪发现越来越多的人从世界各地赶来，为这位"一次性红娘"表示迟到的敬意，而自己——只是这个朝圣队伍中的普通成员。

阿贝尔的英年早逝并没有影响他成为"少年英雄"。法国数学家埃尔米特说，他的数学思想够数学家们工作150年。

阿贝尔死后，克雷尔在自己于 1826 年创办的《纯粹与应用数学杂志》上，为他写下了长篇悼词：“阿贝尔的全部著作镌刻着无比的创造天才……”

这里提到的德文《纯粹与应用数学杂志》(Crelle's Journal Für die Reine und Angewandte Mathematik)，常称为《克雷尔杂志》，是目前仍然在发行的世界上最古老的数学期刊，和我们 5.4 中提到的刘维尔主办的同名法文杂志是两码事。

是的，肯普和基尔豪“只是这个朝圣队伍中的普通成员”，挪威人一直没有忘记他们的伟大儿子，1902 年，挪威有意设立一项阿贝尔奖纪念他诞辰 100 周年，但因故未果。

世事沧桑又百年。2001 年 8 月，挪威首相斯托尔滕贝格 (J.Stoltenberg) 宣布，为了纪念阿贝尔诞辰 200 周年，政府将从 2003 年起出资设立“尼尔斯·亨利克·阿贝尔奖”，奖金的基金是 2 亿挪威克郎（约合 2300 万美元)。2002 年 8 月 5 日，出席北京第 24 届国际数学家大会的奥斯陆大学数学系教授斯托默，也在大会上做了同样的宣布。

颁奖典礼于每年 6 月 3 日在奥斯陆举行的“阿贝尔奖”，被公认为数学界的“诺贝尔奖”。它每次的奖金高达 600 万挪威克郎，和诺贝尔奖现在的约 100 万美元可以大致比肩，没有年龄限制，从而弥补了此前的国际数学大奖“菲尔兹奖”(4 年一次，当初 1500 美元，后来增加到 4000 美元，40 岁以下)、沃尔夫奖（每年颁发一次，10 万美元）等数学奖的种种不足。

迄今为止，已有 3 位数学家荣获阿贝尔奖。2003 年首届阿贝尔奖授予法国数学家让·皮埃尔·塞尔（J.P.Seere, 1926～)，使之成为登上“荣誉列车”的第一位乘客。而 2004 年的阿贝尔奖则被出生在英国的美国数学家阿蒂亚（Sir Michael

F.Atiyal，1929～）和他的合作者、美国数学家辛格（Isadore Singer，1924～）瓜分。

此外，人们还为阿贝尔建立了纪念雕像（图5-30）。



图5-30　阿贝尔雕像

而“积分方程”这个名称，则是德国数学家杜布瓦－雷蒙（Paul du Bois-Reymond，1831～1889）首先给出的。

5.18 级数何名傅里叶——三角级数中“暗藏”的e

现在，如果你走进法国交通工程学院的图书馆，就可以看到静静地躺着一篇大约两个世纪以前的论文。是什么论文如此珍贵，它的作者又是谁？

在级数中，有一个著名的级数——三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (5.17)$$



图 5-31　傅里叶

1807 年，法国物理学家、数学家傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768～1830）（图 5-31）在讨论热传导问题的一篇论文中，首先指出以 2π 为周期的任意函数，可以表示为（5.17）式。

（5.17）式中的“傅里叶系数” a_n 和 b_n 可以用

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots) \qquad (5.18)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots) \qquad (5.19)$$

表示。前面提到的论文，就是傅里叶这篇 1807 年的论文。不幸的是，法国科学院委托的拉格朗日、拉普拉斯和勒让德却以论文“不严格”予以否定。

不过，现在我们知道，三角级数在数学、物理学、天文学和工程技术中都有广泛应用。所以这篇珍贵的论文值得法国交通工程学院图书馆永久收藏。

当然，（5.17）式也可展开为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots \qquad (5.20)$$

不过，傅里叶当年没有验证（5.18）和（5.19）式为系数

时，(5.17) 式是否收敛以及它的和是否等于 $f(x)$。直到 1820 年，另一位法国数学家柯西在讨论级数时，才注意到必须讨论它的收敛性。1829 年，德国数学家狄利克雷（1805～1859）则得到了收敛性的确定成果。

即便如此，三角级数 (5.17) 后来还是被叫做“傅里叶级数”，这又是为什么呢?

原来，主要是因为傅里叶发现 (5.20) 式可以推广到用下面的一对积分公式代替：

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2i\pi yx}dx \tag{5.21}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)e^{2i\pi xy}dy \tag{5.22}$$

你看，e 又在这里“现身”了——它“暗藏”在三角级数之中!

(5.21) 和 (5.22) 式的意义是，对属于 $-\infty<x<+\infty$ 上的某个函数类中的函数 $f(x)$，(5.21) 式关于一切 $y(-\infty<y<+\infty)$ 存在，因此得到函数 $g(y)$；用函数 $g(y)$ 又可以形成 (5.22) 式，所得到的函数就是原来的函数 $f(x)$。

你看，数学在这里多么“亲密”，多么和谐地相互依存。

不但如此，(5.21) 和 (5.22) 式还创立了抽象分析学中的共轭理论，而傅里叶建立数学－物理模型的方法和推演技巧为后人树立了榜样，值得载入史册。

后来，法国数学家和物理学家泊松和他的前辈们，还把傅里叶级数和“傅里叶积分”联系在一起，他的最简单的情形是

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2i\pi mx}dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)$$

看，这个式子中 e 也“现身”了。

这里提到的傅里叶积分，是指对任意函数 $F(x)$，有

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(a)\mathrm{d}a\int_{0}^{+\infty}\cos q(x-a)\mathrm{d}q$$

它是一个偏微分方程的解。这个解是傅里叶在 1811 年得奖的一篇关于热传导的论文（对 1807 年论文的修改）中得到的——为了推动对热扩散问题的研究，法国科学院在 1810 年悬赏征求这方面的论文。

稍有的遗憾是，可能是评委拉格朗日对论文的严格性和普遍性的缺陷再次提出批评，并反对发表这篇论文，以至它当时没能发表。傅里叶认为这是一种无理非难，决心把这篇论文的数学部分扩充为一本书。经过“十年寒窗苦”之后，他终于完成了这部名为《热的解析理论》的书，并在 1822 年出版。

5.19 从达·芬奇到伯努利——“悬在空中”的 e

在文艺复兴时期的意大利，有一位“奇”人，他就是科学家、艺术家达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452～1519）。他的“蒙娜丽莎”至今依然在微笑，他在科学上“全方位”的探索依然鼓舞着来者。

在达·芬奇苦苦探索的问题中，有一个“悬链线(catenary，莱布尼茨改的名）问题”。这个问题是，一根柔软而不能自由伸长的悬挂在两个固定点（这两个点不一定等高）之间，求这根线所形成的曲线（的方程)。但是，他没有给出明确的答案就魂归西天了。

达·芬奇的同胞伽利略也研究过悬链线问题，他猜想这条曲线可能是抛物线。

但几十年以后，荷兰科学家惠更斯却从物理学的角度证明

伽利略的猜想是错误的。

到了1690年5月，瑞士数学家雅格布·伯努利（1654～1705）在德国的《教师学报》上又把这个问题重新提了出来，并引起了许多人的关注。

1691（一说1690）年6月的《教师学报》上，惠更斯、雅格布·伯努利的弟弟约翰·伯努利（1667～1748）和莱布尼茨都发表了各自的解答。

惠更斯用的是几何方法，但十分繁琐。

约翰·伯努利借助于微积分的解答，是构造了微分方程 $dy/dx = s/c$，其中 s 是图5-32中 B 点到线上任意点 A 的长，c 是悬着的线在单位长度内与重量有关的参数。从这个微分方程出发，就在平面直角坐标系中得到 $y = c\cosh(x/c)$ 的结果。

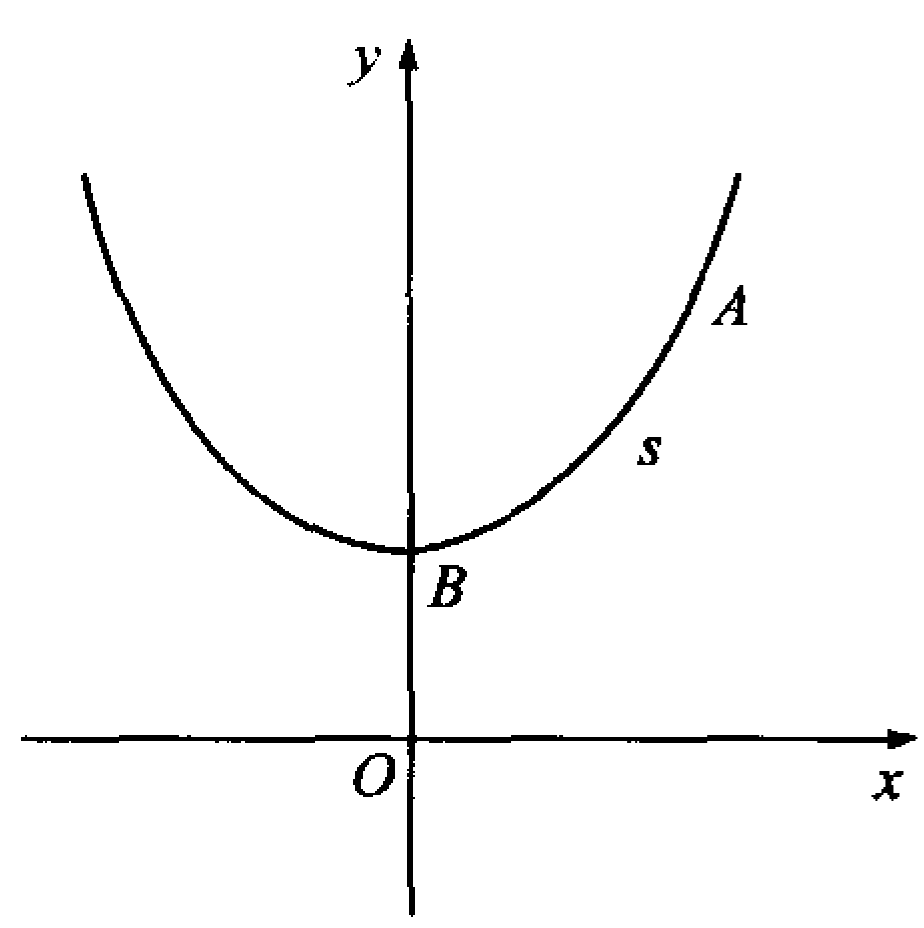


图 5-32

莱布尼茨用微积分的方法也得到和约翰·伯努利一样的结果。

1691～1692年，雅格布和约翰兄弟俩还进一步解决了悬挂着的变密度非弹性柔绳，等尺寸的弹性绳，以及在每一点的作用力都指向一个固定中心的细绳所成形状等更为复杂的问题。

1691 年，雅格布·伯努利发表在《教师学报》上的论文证明，悬挂在两个固定点的细绳在它能取的所有形状中，以悬链线的重心最低。

伯努利兄弟俩是继牛顿和莱布尼茨之后，微积分的两个最重要的奠基者，他们对悬链线的研究，促进了微分方程的发展。

在"下笔千言"之后，可能有人要问，悬链线和 e 有什么关系呢?

有。我们知道，前面的"cosh"是"双曲余弦"，用这个符号可以把 $y = c\cosh(x/c)$ 写成

$$y = c\,\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}$$

看，e 又被数学家们用细线"悬在空中"了。

悬链线是一种重要的曲线，在理论研究和工程技术中都有广泛的应用。

比如，曳物线（tractrix）——从图 5-32 中 B 点出发的渐伸线等曲线，和它都有关。

曳物线的直角坐标参数方程是 $x = a[\ln\tan(t/2) + \cos t]$，$y = a\sin t$（其中 t 是参数），其中也有 e。

又如，我们经常看到美丽的曲线形的"悬索结构"桥——通常大跨度的桥都用这种结构，它的曲线多采用悬链线形。

有趣的是，用微积分知识可以证明，对于两端固定的曲线 M，当它的形状是悬链线的时候，才能使 M 绕图 5-32 的 x 轴旋转所得的旋转曲面的面积最小。

后来，对悬链线的研究发展为对悬链面（catenoid）的研究。悬链面是以悬链线为母线的旋转曲面，它的立体直角坐标

方程是

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{c(e^{x_3/c} + e^{-x_3/c})}{2}$$

5.20 从维诺格拉多夫到陈景润——“高斯余项”中的e

1801年，高斯出版了开创数论研究新纪元的《算术研究》(Disquisitiones Arithmetica)。他在书中对判别式为 $-d<0$ 的正定型类数均值给出了一个渐近公式

$$\sum_{d=1}^{n} h(-d) = \frac{4\pi}{21\xi(3)} n^{3/2} - \frac{2n}{\pi^2} + R(n) \qquad (5.23)$$

其中

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}, s > 1$$

但是，高斯既没有给出证明，也没有给出余项 $R(n)$（我们把它叫做“高斯余项”）的估计，于是这些问题留给了来者。

1917年，俄国－苏联数学家维诺格拉多夫首次用他的新方法给出了（5.23）式的证明和余项估计。1963年，他又得到

$$R(n) = O[n^{2/3}(\ln n)^6]$$

的结果——其中有e。中国数学家陈景润也独立得到几乎同样的估计

$$R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$$

也是在1963年，维诺格拉多夫对球 $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant x$ 内整点数 $P(x)$ 得到估计式

$$P(x) = 4\pi x^{3/2}/3 + O[x^{2/3}(\ln x)^6]$$

而陈景润在同年也得到几乎相同的估计式

$$P(x) = 4\pi x^{3/2}/3 + O(x^{2/3+\varepsilon})$$

它们至今仍是最好的结果。

5.21 聚首“中心”的“难题”——4 只甲虫如何爬行

“砰!”随着一声发令枪响，4 只呆在正方形的 4 个顶点的甲虫，分别开始向相邻甲虫运动方向成直角的方向前进（图 5-33）。正方形的边长为 1m，这些甲虫都受过训练——前进的速度（不一定是匀速）都一样，而且总是以它们前面的那一只甲虫为目标。这样，每只甲虫都慢慢地偏向了右边。现在的问题是，它们将走出什么样的路线，最后到达何处，每只甲虫走了多远？

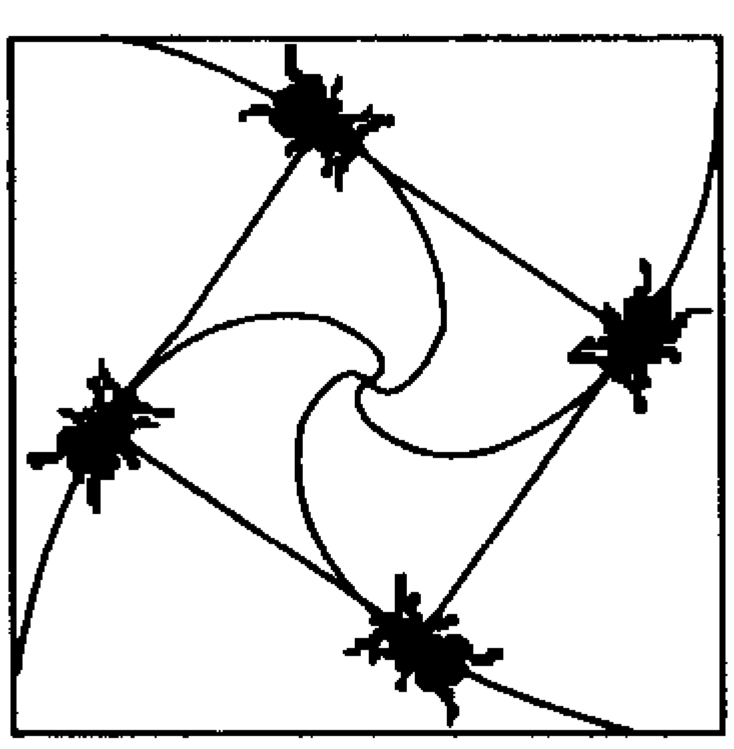


图 5-33

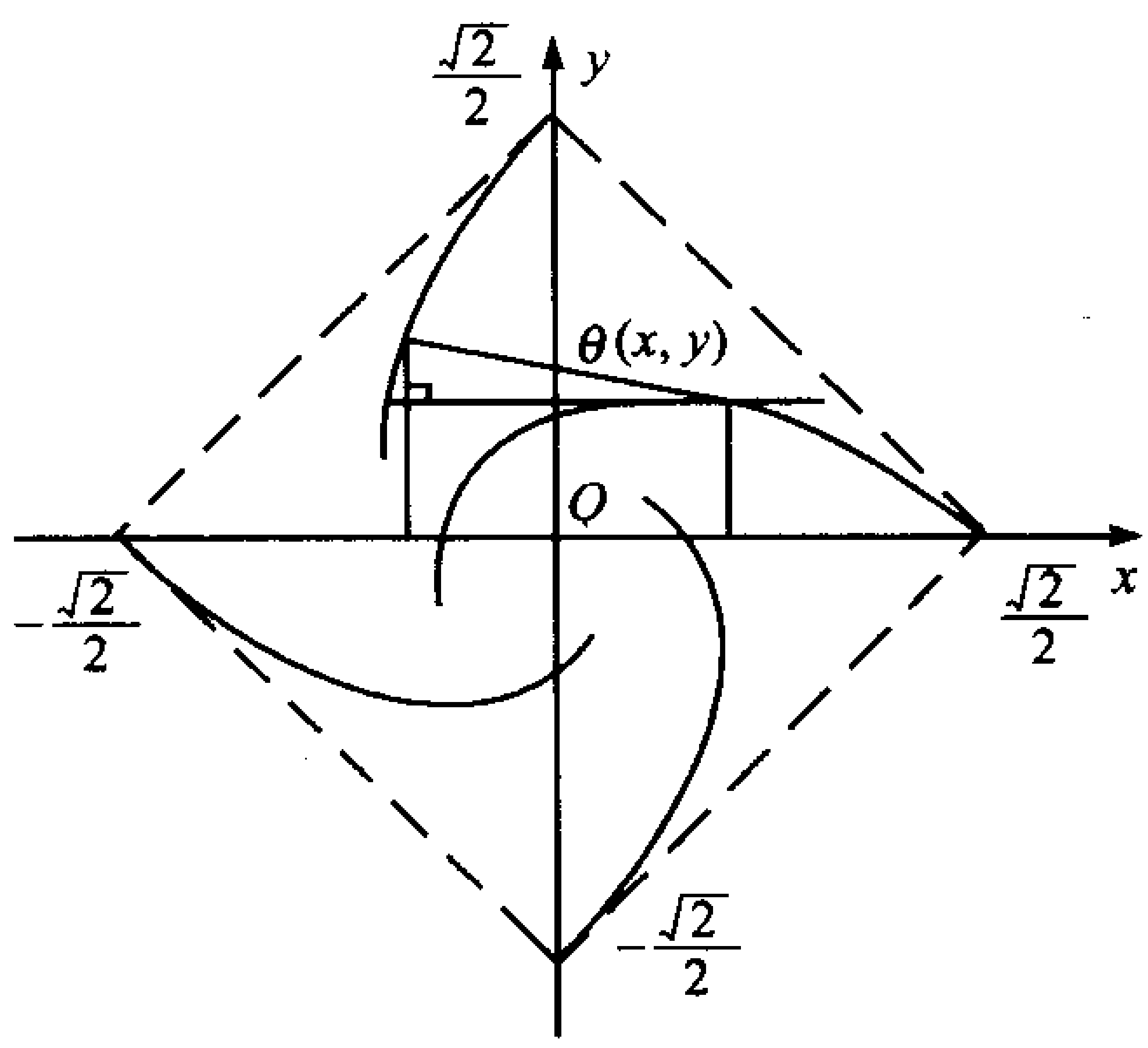


图 5-34

如图 5-34，把图 5-33 翻折 180°，由于爬行的对称性，只要绕原点旋转 $\pi/2$，则第一只甲虫和它相邻的第二只甲虫的路线重合。由于运动曲线的切线的斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-\tan\theta$，所以第一只甲虫的路线 $y=y(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan\theta=\frac{-(x-y)}{x+y} \tag{5.24}$$

用极点在原点 O 的极坐标表示，就是

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases} \tag{5.25}$$

其中 $r=r(\theta)$ 是第一只甲虫在极坐标中的行进路线。

将（5.25）式微分，就得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{cases} \tag{5.26}$$

把（5.25）和（5.26）式代入（5.24）式，就得到

$$\frac{\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta}=\frac{r\sin\theta-r\cos\theta}{r\sin\theta+r\cos\theta}$$

由此式就得到 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=-r$，即 $\mathrm{d}r/r=-\mathrm{d}\theta$，把 $\mathrm{d}r/r=-\mathrm{d}\theta$ 两端积分，就有

$$\ln r=-\theta+C,\quad r=C_1\mathrm{e}^{-\theta}(C_1>0)。$$

又由 $r(0)=\sqrt{2}/2$ 得到 $\sqrt{2}/2=C_1, r=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}/2$——一条包含 e 的螺旋曲线。

而其余 3 只甲虫的爬行路线，是 $r=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}/2$ 绕原点分别旋转 $\pi/2$，π 和 $3\pi/2$ 得到。

4 只甲虫无休止地沿螺旋曲线追逐，最终当 $\theta\to+\infty$ 时，$r=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}/2$ 中的 $r\to0$，所以 4 只甲虫在原点 O 相会。它们各自爬行了

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{+\infty}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\mathrm{e}^{-\theta}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=1$$

由此可见，每个甲虫都爬行了 1m。

以上是“正规”的数学解答。

下面，还有一种“不用数学”的解答。

显然，每只甲虫总是和它相邻的甲虫成直角方向运动，可见 4 只甲虫始终在正方形的 4 个顶点上。随着追逐的延续，显然正方形在逐渐缩小。最后的必然结果是，正方形缩小为一个点——4 只甲虫聚首“中心”。“难题”得解。

5.22 数学也要“轻装上阵”——e 与微积分

在数学分析教科书中，几乎都会用较大的篇幅介绍 e 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 这个数学中最重要的基本极限之一。这是为什么?

不容置疑，这是数学分析系统介绍的需要和为了“用”。

为什么数学分析系统介绍要介绍 e 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 呢?因为要介绍数列的极限和函数的极限，就必须面临两个最重要的极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$。

那么，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 这个极限又有什么用呢?

我们知道，在数学分析中，要牵涉到求导、微分、积分等，就必定会出现一些关于指数、对数的式子，必然涉及“底数”的问题，因此数学家们都希望选取使得这些式子具有最简洁形式的底数。

那么，选什么数作底数好呢？

我们来看一个实例。如果 $y = \log_b x$，那么 $dy/dx = (1/x)\log_b e$。很显然，只有当 $b = e$ 的时候 $dy/dx = (1/x)$ 才具有最简洁的形式。当然，这还不是严格的证明，但是微积分理论可以完成这个证明。

同时，除 1 以外的任何数作底（以 1 作底在代数中也是“犯规行为”）的代数函数，进行微积分运算以后，都会出现以 e 为底的函数。怪不得数学家们都说：“$\ln x$ 和 e^x 在高等数学中特别重要。”而 $\int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n$ 则是微积分中的一个重要基本公式。

有趣的是，当 e 作底的时候，$(e^x)' = e^x$ ——函数和它的导数“相等”，而其他任何数作底都不会这样。

更有趣的问题是，假设 $f'(x) = f'(nx)$（式子中 $x>0$，$n\neq 0$ 和 1），求 $f(x)$。最后的答案是 $f(x) = \ln x + C$（式子中 C 是常数）。你看，e 在这里又“鬼使神差”地作底了！

5.23 “基本”和“重要”——e 在微积分中闪光

在微积分中，有许多公式，其中有“基本极限”、“重要极限”和“基本积分”。有趣的是，其中到处都有 e 的身影。

通常，微分学中列出 6 个基本极限，其中 4 个含有 e，简直就是它的大半壁“江山”

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^x = \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{k/z} = \mathrm{e}^k$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

而微分学中列出的重要极限中，下面 6 个也含有 e：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n>0)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^n} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{1/x} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n}{n!} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right] = c = 0.577\,215\cdots$$

当然，上面的公式有的我们已经提到过。

在基本（不定）积分公式中，也有许多涉及 e，下面是其中 5 个积分后含 e 的公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a}+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{(u+a)(u+b)} = \frac{1}{(b-a)}\ln\frac{u+a}{u+b}+C$$

$$\int a^u\mathrm{d}u = \frac{a^n}{\ln a}+C$$

$$\int\tan u\,\mathrm{d}u = -\ln\cos u + C$$

$$\int \cot u du = \ln \sin u + C$$

5.24 众“神”朝拜“美猴王”——离不开 e 的数学

话说美猴王孙悟空保唐僧西天取经成功归来之后，更加名扬世界，花果山理所当然地就成了众神朝觐之地。

这“美猴王”就是 e，这众“神”，就是数学中形形色色的公式。

我们在 3.3 中提到，等角螺线（equiangular spiral）(图3-4）又叫对数螺线（logarithmic spiral）或伯努利螺线（Bernoulli spiral)，它的极坐标方程 $\rho = k e^{\alpha\theta}$ 或 $\rho = e^{\theta}$ 中就有 e。看，这种螺线果然朝拜了“美猴王”。

设判别式为 d 的二次域k 的类数为$h(d)$，德国数学家高斯曾猜想，当 $|d| \to \infty$ 的时候，$h(d) \to \infty$。1934 年，加拿大数学家海尔布罗恩（Hans Arnold Heilbronn，1908～1975）证明了高斯的猜想，1935 年则“更上层楼”，得到更为精确的结果

$$\lim_{|d| \to \infty} \frac{\ln h(d)}{\ln \sqrt{|d|}} = 1$$

这也是在朝觐 e。

法国数学家柯西把残数演算应用于解 $F\left(\frac{d}{dt}\right)u = 0$($F$ 是一个多项式)，得到

$$u = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\phi(s)e^{st}}{F(s)}ds$$

其中 C 是任一包围 F 所有零点的围道，ϕ 是任一多项式，这

其中有 e。

在俄国数学家罗巴切夫斯基（Николай Иванович Лобачевский）创立的罗氏非欧几何中，圆周长 l 与半径 r 不成正比，而是按

$$l = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k})$$

的关系更迅速地增长。利用 $e^{r/k}$ 和 $e^{-r/k}$ 的泰勒展开式，就可以用上述公式求得

$$l = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{r^2}{k^2} + \cdots\right)$$

你看，e 出现在非欧几何的圆周长公式中了。

在幂级数中，有许多充满和谐美的式子，都"回归"到 e

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x(-\infty < x < +\infty)$$

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

$$= \ln(1 + x)(-1 < x \leqslant 1)$$

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

$$= \ln(1 - x)(-1 \leqslant x < 1)$$

最后这个式子，首先是在圣安德鲁大学任数学教授的詹姆斯·格雷戈里得到的，记载于他 1668 年出版的《几何练习》一书中。

此外，还有

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots\right) = \ln\frac{x+1}{x-1}(|x| > 1)$$

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right) = \ln\frac{1+x}{1-x}(|x| < 1)\text{(来历见 4.5)}$$

$$2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right] = \ln x(x > 0)$$

$$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots=\ln x(0<x\leqslant 2)$$

$$\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\cdots=\ln x\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

$$\ln a+2\left[\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\cdots\right]$$
$$=\ln(a+x)(a>0,x\geqslant -a)$$

$$x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$$
$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)(|x|<1)$$

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n(\ln a)^n}{n!}$$
$$+\cdots(a>0,-\infty<x<+\infty)$$

此外，在“雅可比函数”

$$\Theta(u)=\Theta(0)\cdot\exp\left(\int_0^u Z(u)\mathrm{d}u\right)$$

中，在完整三角和的式子

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}\mathrm{e}(f(x)/q),\quad \mathrm{e}(x)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x}$$

中，在华罗庚证明的不完整三角和的式子

$$\sum_{x=1}^{p}\mathrm{e}\left(\frac{hx^k}{q}\right)=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{q}\mathrm{e}\left(\frac{hx^k}{q}\right)-O(q^{1/2+\varepsilon})$$

中，都有 e 的影踪。

最后，在整函数分解为素因子的定理中，在埃尔米特（正交）多项式中，在德国数学家库默尔（Ernst Edward Kummer，1810～1893）把方程 $x^n+y^n=z^n$ 改写时用到的 n 次本原单位根中，德国数学家比贝尔巴赫（Ludwig Bieberbach，1886～1982）在 1916 年提出的关于单叶函数论的一个猜想中……都有 e 现身。

以上事实表明，e 的确成了神通广大的孙悟空，所以有人说，e 在数学中的作用毫不亚于大名鼎鼎的 π。而以色列学者伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中，则把 π，e，ϕ 并列为“三个著名的无理数”。

“生在苏杭，葬在北邙。”如果这些公式也会“死亡”的话，它们一定会葬在它们心中的“风水宝地”“北邙”——花果山。为什么呢？它们“生前”就已经对孙悟空“心驰神往”了。

这里说的北邙山，又名邙山，在中国著名古都洛阳北面，是许多帝王将相的葬身之地，所以《封神演义》开篇诗中有“青史几行名姓，北邙无数荒丘”的句子。

◎第六章

e和万物如此钟情——走出"王宫"的自然对数

使数学脱离科学的实际需要，
就好比把母牛关起来，
不让它接触公牛，
其结果是使它不出成果。

——切比雪夫

e不但在数学的"王宫"中漫游，而且它还走出"王宫"，和其他学科"恋爱"一番。这一章，我们来看一看在数学以外的各个领域，e是如何和科学"谈情说爱"的吧。

6.1 你也可当"大力士"——缆绳靠e系船舟

"工人们停止了锤击，两旁支撑船身的支持物已经移开。船要下水了。

呜——一声长鸣，缆绳解开，'特拉波科罗'号摇摆着滑了下去。所有的眼睛，都注视着这艘华丽的大船。

……突然，只听一声惊呼……原来一只快艇要从'特拉波

科罗’号下水的船坞前面进港。

……在这两船就要相撞的危及关头，突然出现一个人：头高身大……胳膊像起重机……他在不到一分钟的时间内，把系在‘特拉波科罗’号前部的缆绳绕在钉在地里的木桩上，以‘超人’的气力抓住缆绳的另一端……大约有十秒钟……最后缆绳断了。

可就是这十秒钟的时间已经足够，‘特拉波科罗’号下水以后，只轻轻地擦了一下快艇，就向前驶去。

这位使快艇脱险的大力士，就是马蒂夫。”

以上这段故事，是著名科幻作家儒勒·凡尔纳在小说《马蒂斯·桑多尔夫》中讲的。

“力拔山兮气盖世”——许多人都想当项羽或马蒂夫这样的大力士。

但是，绝大多数人都不能如愿以偿。于是，人们常利用杠杆、动滑轮，辘轱、斜面、螺旋、劈、水压机等这些“力的放大器”，来圆这“大力士梦”，因为它们能将小力“变为大力”。

用尼龙绳打结，是不容易打得牢靠的。晾衣物等的绳子，有时会自己松脱。打包裹、铺盖卷的时候，你会看到棱角处比其他部位被绳子勒得更深。船员或渔民在系船的时候，会在缆绳桩上绕许多圈。有的传动皮带要扭成“8”字形……

发生这些现象的原因是什么?

这里将分析另一种“力的放大器”，实现你的“大力士梦”，并解释包括上述现象在内的有关现象。

在图 6-1 中，设 $T(\theta)=T_0$ 为通过绳子加在半径为 r 的无摩擦不动圆轮上的一对力，$\mathrm{d}N$ 为圆轮反推绳子的法向力；$T(\theta)$ 与 T_0 合成后的力（由 AB 长度示出），与 $\mathrm{d}N$ 有“二力

平衡”的关系，并设 M，N 为绳与轮的切点，$\angle MON = \mathrm{d}\theta$，$C$ 为菱形 $AEBD$ 的中心。

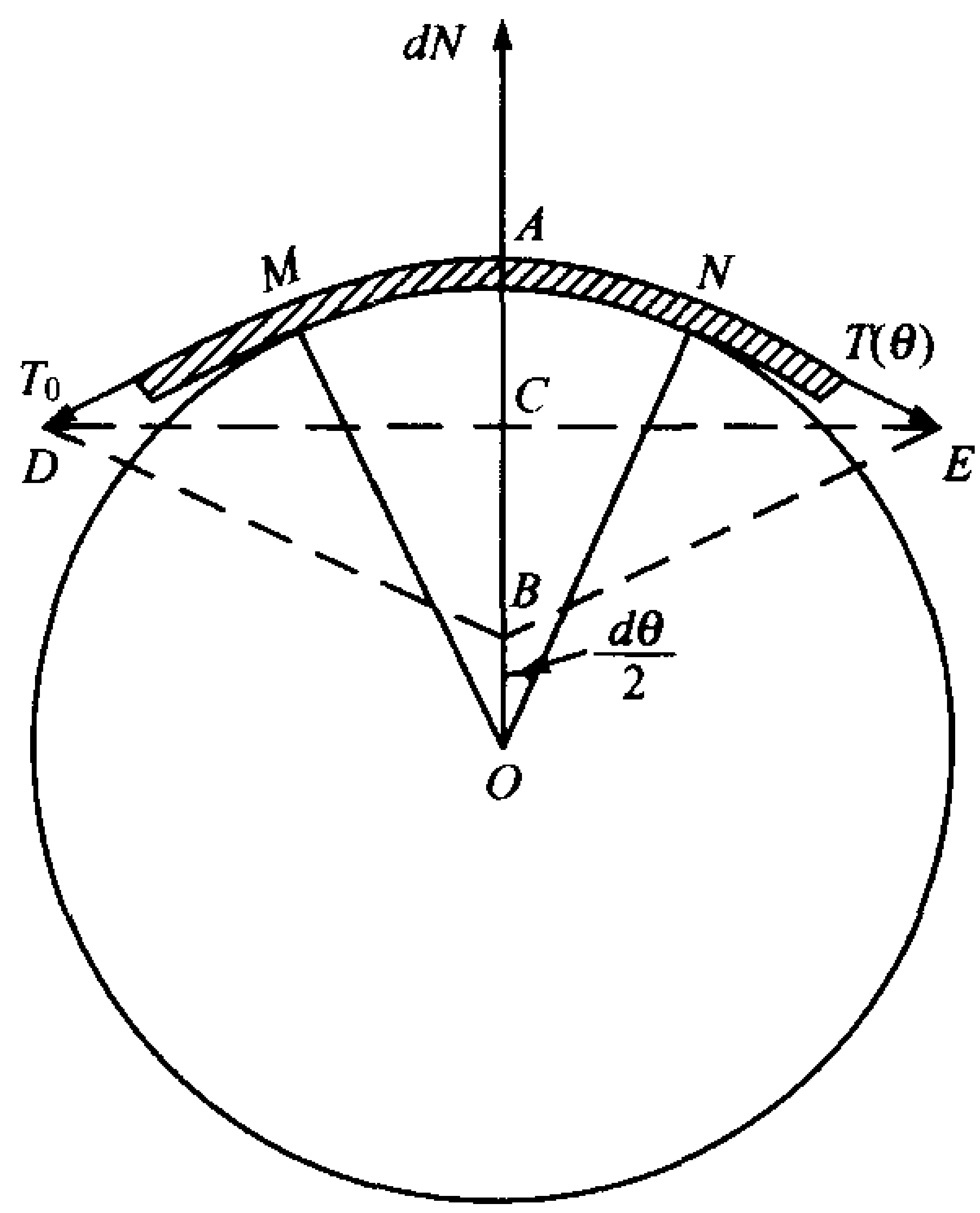


图 6-1

显然，因为 $\angle AEC$ 与 $\angle AON$ 的两边分别垂直且同向，所以 $\angle AEC = \angle AON = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}$ 。又因 T_0 与 $T(\theta)$ 合成的力与 $\mathrm{d}N$ 等大、反向，所以在直角△ACE 中可知：

$$\frac{\mathrm{d}N}{2} = T(\theta)\sin\left[\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

当 $\mathrm{d}\theta$ 为微分量时，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}N}{2} = T(\theta)\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{（这里用到当 }\theta\text{ 很小的时候 }\sin\theta = \theta\text{）}$$

由此得到

$$\mathrm{d}N = T(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{6.1}$$

以下将求得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\overset{\frown}{MN}} = \frac{T(\theta)}{r} \tag{6.2}$$

用$\overset{\frown}{MN}$去除（6.1）式的两边，就得到

$$\frac{\mathrm{d}N}{\overset{\frown}{MN}} = \frac{T(\theta)\mathrm{d}\theta}{\overset{\frown}{MN}}$$

就是

$$\frac{\mathrm{d}N}{\overset{\frown}{MN}} = T(\theta)\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} = \frac{T(\theta)}{r}$$

这就是（6.2）式。

（6.2）式表明，如果$T(\theta)$一定，那么单位弧长上的法向力（即$\frac{\mathrm{d}N}{\overset{\frown}{MN}}$）与 r 成反比。这一结论能解释用绳子扎紧包裹、铺盖卷时，同是一段绳子，却使棱角处勒得最深，因为这里的 r 最小。也能解释捆扎小物体的时候，比捆扎大物体容易捆得紧些。

由于绳、轮接触处不光滑，$T(\theta)$ 和 T_0 两力不平衡，设滑动前相差某一值 $\mathrm{d}T(\theta) = \mu\mathrm{d}N$（$\mu$ 为轮绳间滑动摩擦系数），绳在轮上绕了 θ 弧度。下面将导出 $T(\theta)$ 与 T_0 间随 θ 不同而变化的关系式。

将（6.1）式代入 $\mathrm{d}T(\theta) = \mu\mathrm{d}N$ 中，就得到

$$\mathrm{d}T(\theta) = \mu T(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

就是 $\frac{\mathrm{d}T(\theta)}{T(\theta)} = \mu\mathrm{d}\theta$。

把这个式子两边积分，就有

$$\ln T(\theta) = \mu\theta + C'(\text{式中 } C' \text{ 为积分常数}) \tag{6.3}$$

当 $\theta=0$ 时，显然$T(\theta) = T_0$，把它代入（6.3）式，求得 $C=\ln T_0$。

这样（6.3）式就变为 $\ln T(\theta)=\mu\theta+\ln T_0$，此式可变形为

$$T_0(\theta) = T_0 e^{\mu\theta} \qquad (6.4)$$

（6.4）式为欧拉在 18 世纪所发现，也称为“欧拉公式”。

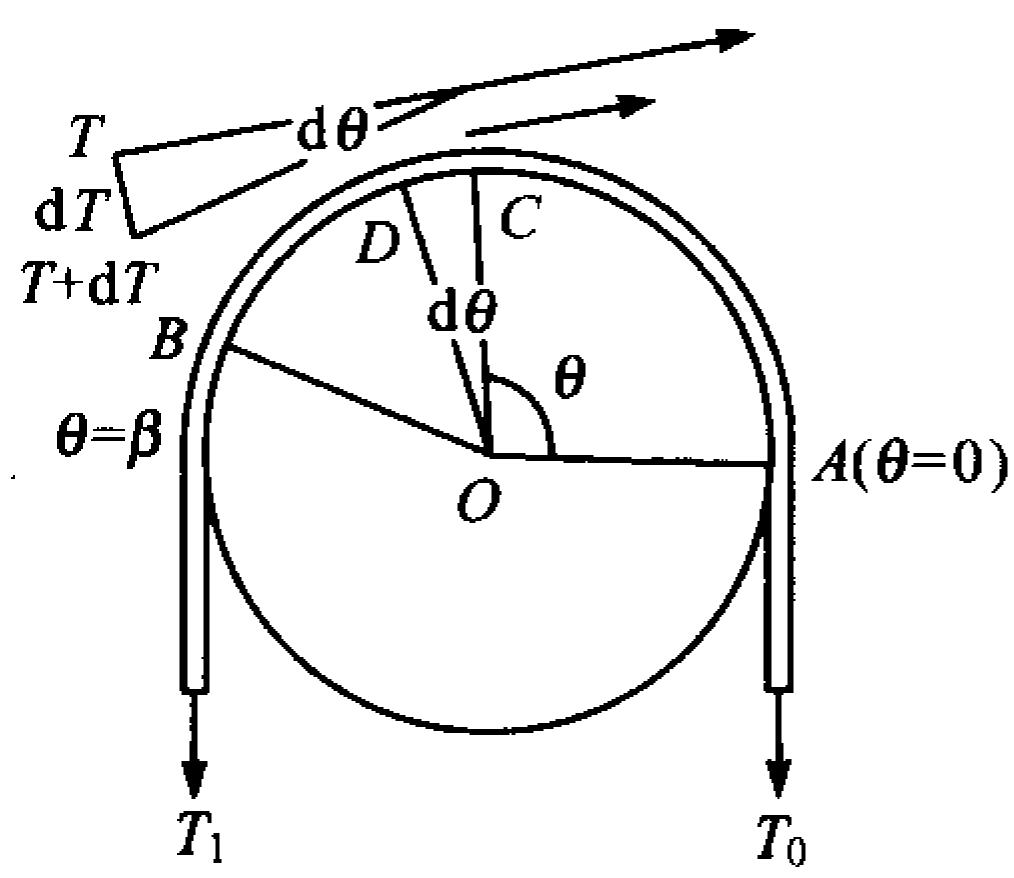


图 6-2

以下是推导出（6.4）式的另一种本质相同的方法。

在图 6-2 中，设绳绕轮的圆心角 $\angle AOB=\beta$，切点 A 处的拉力为 T_0，另一切点 B 处使绳开始滑动的牵引力为 T_1，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一点，且 $\angle AOC=\theta$。

现在，我们来研究 C 处的一个微小增量 $d\theta$ 所对应的 $\overset{\frown}{CD}$ 这一部分绳的平衡。

如果 C 处向“右”拉的力为 T，则 D 点向“左”拉的力应该比 T 大一个作用于这部分的摩擦力 dT，即等于 $T+dT$。

这个摩擦力是皮带对 $\overset{\frown}{CD}$ 的压力 dN 引起的，所以大小是 μdN（μ 是摩擦系数）。这样就有 $dT=\mu dN$。

在近似直角△OCD 中，$dN=T\tan(d\theta)$；此外，由于 $d\theta$ 很小，所以 $\tan(d\theta)\approx d\theta$。这样就得到 $dN=Td\theta$。

由 $dT=\mu dN$ 和 $dN=Td\theta$ 可知，$\frac{dT}{T}=\mu d\theta$。此式积分后，就得到 $\ln T=\mu\theta+B$（B 是积分常数）。因为对应于 $\theta=0$ 的 A 点时 $T=T_0$，所以 $B=\ln T_0$，于是得到 $T=T_0e^{\mu\theta}$，这就是“欧拉公式”，因此当 $\theta=\beta$ 时，使绳滑动所需要的 T_1，就可以由 $T_1=T_0e^{\mu\theta}$ 求出。

欧拉公式表明，绕在圆轮（或圆柱、棒、桩）上的绳子或

带子，可将力“放大”到 $e^{\mu\theta}$ 倍。这能解释以下现象：

(1) 水手们可以通过绕在缆柱上多圈的绳子，轻而易举地控制住质量巨大的船只。

例如，有一艘 50t 的船，并设克服船漂走的力为它的重量约 5×10^5N（重力加速度 g 取 10m/s^2）的 $\frac{1}{10}$ 即 5×10^4N，绳绕在缆绳柱上 4 圈即 $\theta=8\pi$，缆绳柱和缆绳之间的摩擦系数 $\mu=0.25$。问至少要多大的力拉住缆绳，才能控制住它不漂走？

把上述数据代入 (6.4) 式，就得到 $T_0=5\cdot\frac{10^4}{2.72^{0.25\cdot8\pi}}\text{N}=93\text{N}$。即只需 93N 的力。

那么，这 93N（牛顿）是一个什么概念呢？我们还是用中国老百姓熟悉的、已经被国家从 1990 年 1 月 1 日起就正式废弃但依旧在广泛使用的“斤”来计量吧。93 牛顿≈19 斤——一个“小小少年”就有这个力，他就能控制住 50t 的大船。

由此可见，凡尔纳笔下的马蒂夫是“冒牌货”，根本就不是“大力士”；或者说，凡尔纳缺乏这方面的知识，让马蒂夫成为“大力士”了。

显然，如果多绕几圈，这个力还会大大减少。这种情形就出现在下面。

(2) 不知道细心的你观察过没有，有时水手们在系缆绳的时候，只是在缆绳柱上绕许多圈，就把余下的缆绳随意扔在船上，绳端并不打结。他们不怕船“野马脱缰”吗？你不必担心——“欧拉”“告诉”他们，重量很大的船无法拖动扔在船上的缆绳而成为“脱缰野马”。

以上 (1) 和 (2) 就是我们所说的“缆绳靠 e 系船舟”。

(3) 牧民拴马，也是类似的道理。他们把缰绳套在横放的

木棒之上，绕上三四圈，然后把缰绳的端头轻轻地打一个结，就放心离开了。即使没有打结——像前面的水手们那样，马儿也不会“脱缰而去”。

（4）晾衣服的时候，将系在柱子上的绳子多绕几圈，绳子就不容易在很重的湿衣服作用下脱落；捆扎物件时多绕几圈可防松脱，也是类似的道理。

（5）皮带之所以能传递动力（图6-3和图6-4），其依据也是靠的皮带和轮子之间有足够的摩擦力，也就是要有足够大的θ。所以有人也把欧拉公式称为皮带理论。

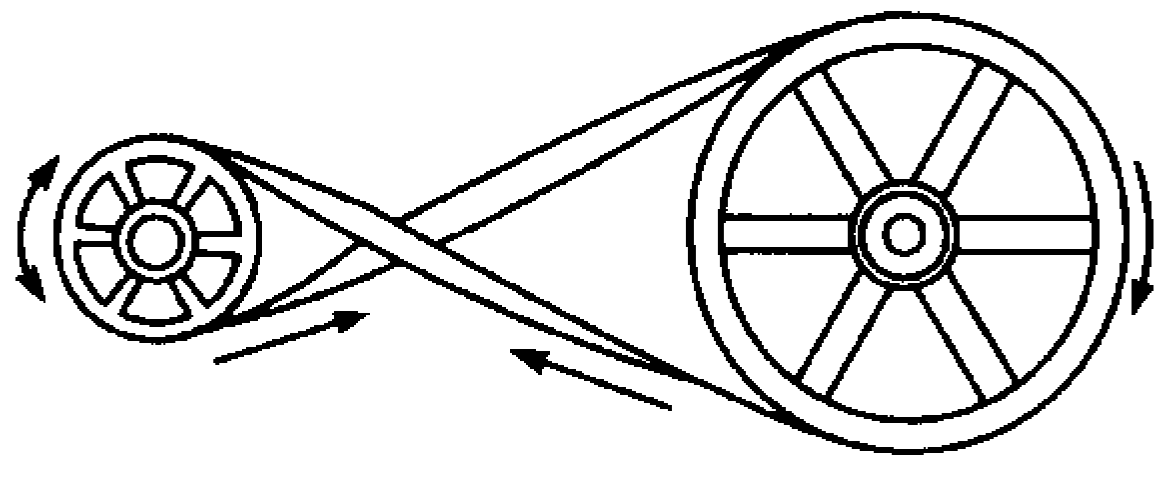


图6-3　皮带的“8”字形传动

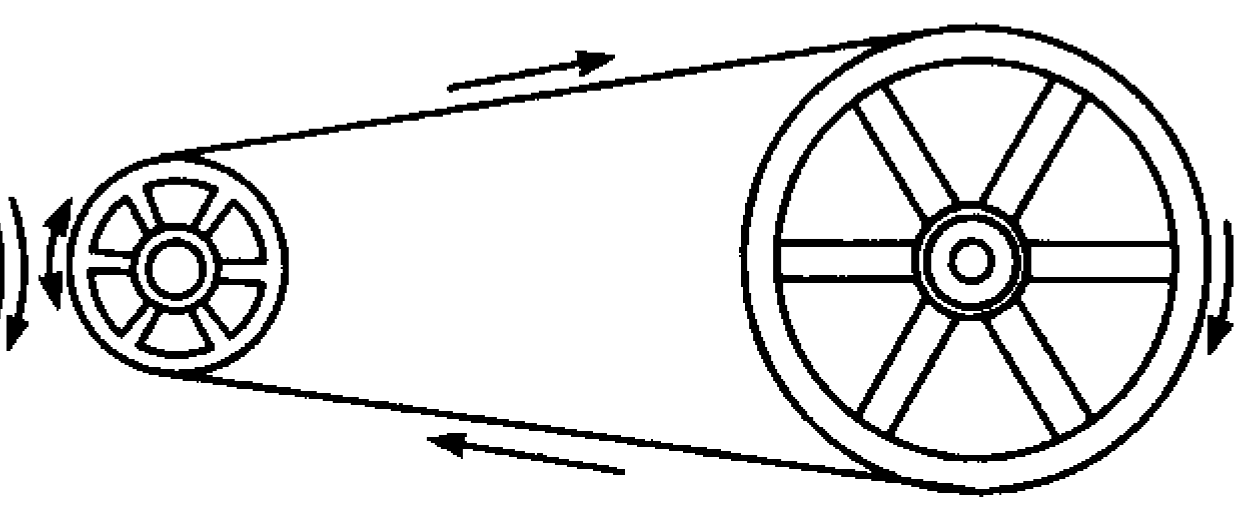


图6-4　皮带的环形传动

（6）有时传动皮带被扭成“8”字形（图6-3）也容易解释——它比环形（图6-4）皮带具有更大的θ，因此更不容易打滑。由此可见，有经验的工人师傅在皮带传动上采用的这个“土办法”，是有科学依据的。当然，由于此时从动轮的转动方向和原来相反（这是有时采用“8”字形传动皮带的另一种作用），应改变主动轮的转动方向——例如由电路控制。

（7）打牢固的结及缚紧绳端。结要打得牢，就一定要绳的曲折多或者围着自己缠绕的圈数多，例如采用“接绳结”（图6-5）以增大θ。

（8）多股绳的绳端容易散开，可用“冠状缚绳端法”（图6-6）缚住，因为用这种方法缚绳端时，各股细绳的曲折增多而使θ增大。

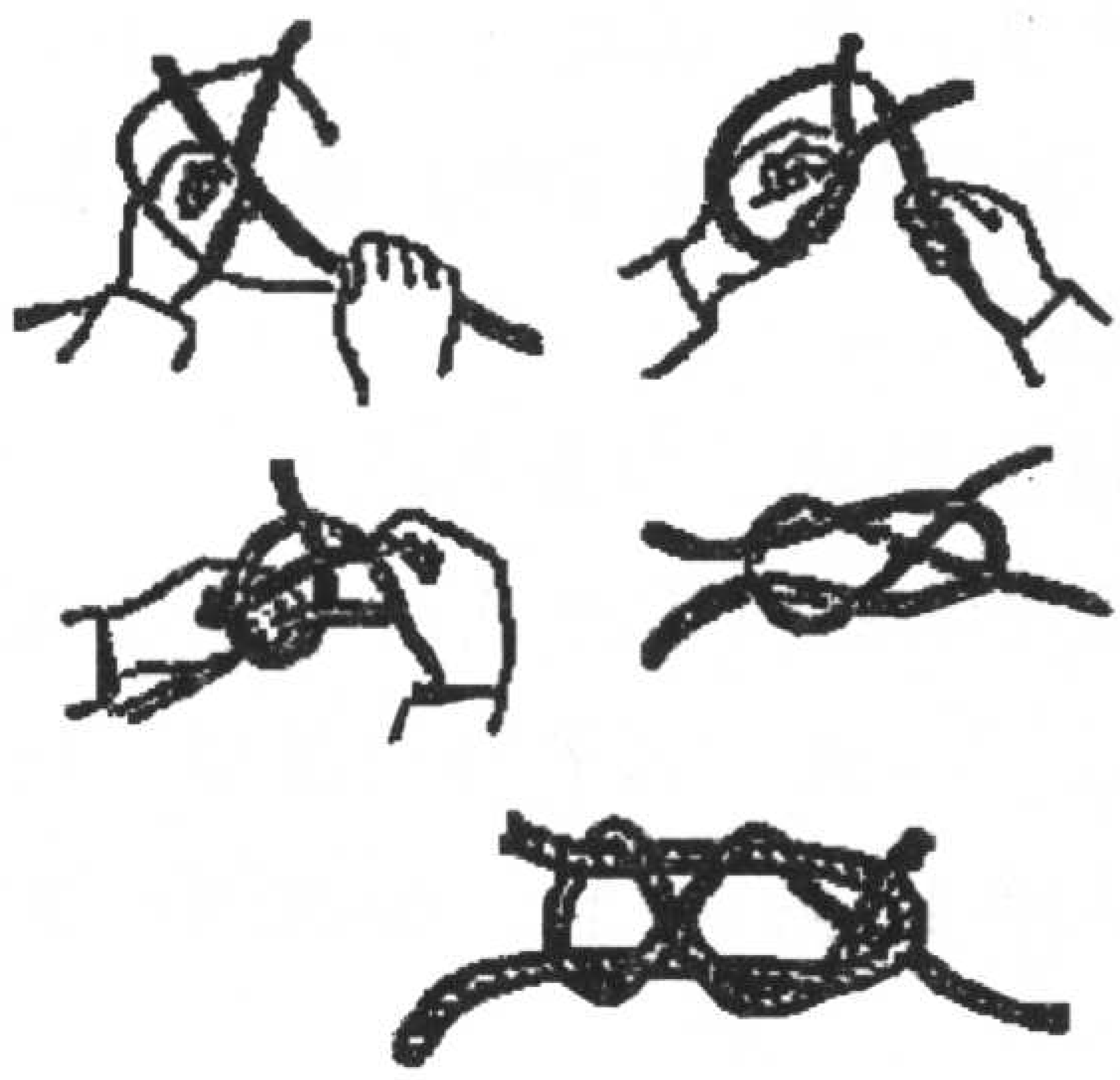


图 6-5 比较牢固的一种结法



图 6-6 一种“冠状缚绳端法”

6.2 赝品名画原形毕露——“衰变”用e揭奥秘

1945 年 5 月 29 日，两名荷兰警察走进首都阿姆斯特丹凯策斯格拉赫特街 321 号，奉命以“叛国罪”逮捕荷兰画家汉·范·米格伦。

原来，画家兼画商米格伦，曾在二战期间将荷兰 17 世纪著名画家杰·弗美尔（Jan Vermeer, 1632～1675）的油画《耶稣基督与奸妇》（简译《妓女》）高价卖给德国空军部长、纳粹头子海尔曼·戈林。



图 6-7 弗美尔真迹《微笑的少女》

可有趣的是，米格伦虽然承认将那幅画卖给了戈林，但却不承认自己是在“卖国”，反

而声称自己是一位“爱国者”。他申辩说，那幅画并不是弗美尔的原作，而是他临摹的赝品。把赝品卖给戈林，欺骗了敌人，当然不是“叛国”，而是“爱国”。

于是，鉴别那些名画是不是赝品就成了当务之急。

1968 年，美国卡纳吉－梅隆大学的科学家们终于鉴别出杰·弗美尔的油画《妓女》是赝品。不过，对米格伦来说，已经没有意义了，因为此前的 1947 年 12 月 30 日，他就因心脏病发作在监狱中死去。

那么，科学家们是用什么方法鉴别的呢？

植物通过光合作用，把含有碳－14 和碳－12（它们是碳的同位素中的两种）的二氧化碳吸收入体内，动物吃了植物，又把这两种碳吸收到体内。由于大气中的碳－14 含量（碳－12和碳－14 之比为 $10^{12}:1.2$）始终不变，所以从古至今动植物体内的碳－14 的含量都相同。但是，当动植物死后，就不可能再吸收大气中的碳－14 了，而它们在生前吸入体内的碳－14 却会因衰变而日渐缓慢减少。这样，就可以根据碳－14的含量来测定这些“死者”生存的年代了。

例如，埃及的考古学家就在离尼罗河不远的山上，发现了一座非常古老的谷仓。测定谷仓里小麦中碳－14 衰变后的含量得知，这些小麦是 6000 多年前留下的。

这样，碳－14 就成了一只能测量很长时间的“考古时钟”。美国化学家利比（Willard Frank Libby，1908～1980）也因这项发明荣获 1960 年诺贝尔化学奖。

放射性物质因衰变而减少是一个普遍规律。前述美国科学家，就是测定油画颜料中钋－210 和镭－226 的衰变率，算出了油画中颜料的“年龄”来鉴别出赝品的。

那什么是衰变率，又怎么具体计算呢？

“衰变率” λ 是描述放射性物质衰变快慢的物理量，又叫“衰变常数”。放射性物质原子核的改变速度$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$显然和当时原子核的总数目 N 和时间 t 成正比，即$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lambda\mathrm{d}t$。把这个式子积分，并设 $t=0$ 时的 $N=N_0$，就得到 $N=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 或 $N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$。这个“衰变公式”描述的，就是著名的“衰变定律”。

在衰变公式中，我们看到 e 必然会出现。

“半衰期” T 是原子核的数目减少到原数目一半时所用的时间，是描述放射性物质衰变快慢的又一个物理量。由$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$知道，$T=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{\lambda}$。这个公式被称为半衰期公式。

例如，碳－14 的 T 约为 5600 年——利比计算出来的，镭－226 的 T 约为 1622 年，钋－212 的 T 只有 $3\cdot10^{-7}$秒。

那么，利比又是用什么方法把碳－14 的半衰期 T 计算出来的呢？

原来，利比从 1930 年左右就开始了这方面的研究，终于在 1947 年获得对古化石年龄测定的技术。他经过约 10 年的精心测定，得到 $N(10)$ 的值，进而求得$\frac{N_0}{N(10)}\approx1.001239$。再由衰变公式得到$\frac{N(10)}{N_0}=\mathrm{e}^{-10\lambda}$。把这个式子两边取自然对数，就得到 $\lambda=\frac{1}{10}\ln\frac{N_0}{N(10)}$。这样，就由半衰期公式 $T=\frac{\ln 2}{\lambda}$ 求得 $T=\frac{\ln 2}{\frac{1}{10}}\ln\frac{N_0}{N(10)}$年$\approx\frac{10\ln 2}{\ln 1.001\,239}$年$\approx$5600 年。当然，由

于测量的误差，其他科学家测定的 T 值就有 5730 年等接近 5600 年的多种。

用衰变公式测量时间 t 的方法，从科学方法角度看，属于“通用科学方法”中应用广泛的“间接测量法”，就是把对 t 的测量转化为对 N 的测量。

“借得山东烟水寨，来买凤城春色。”科学家们就是借 e 这个“烟水寨”，利用衰变公式，来买得“凤城春色”——测定地球年龄、古文物年龄、化石年龄……的。

“混沌初开，乾坤始奠。”那么，混沌在何时初开，乾坤在何时始奠呢？这就是地球年龄的问题。

科学家借助多种放射性元素，用上述方法测得地球上最古老的岩石，年龄约 30 亿年。经过必要的修正和测算，地壳的年龄大约是 46 亿年。这个年龄加上地壳形成前地表熔融的时间，地球的天文年龄大约是五六十亿年。

对于那些没有含碳的古物，当然不能借助于碳的同位素，但可以用相同的原理测定。例如，古代海洋的温度就是利用同位素氧 - 16 和氧 - 18 的变化测定的。具体方法如下。

贝壳的主要成分是碳酸钙（$CaCO_3$），其中氧原子主要由氧 - 16 和氧 - 18 组成，且比例基本上固定为 500∶1。但是，当海水温度变化 1℃时，贝壳中 $CaCO_3$ 里的氧 - 16 和氧 - 18 的比例就会发生显著变化：海水温度升高时氧 - 16 的比例增大，海水温度降低时氧 - 16 的比例减少。这样，事先通过实验，测定在各种海水温度下贝壳中 $CaCO_3$ 里的氧 - 16 和氧 - 18的比例，再把考古发掘出的贝壳进行同位素测定，就能断定古代贝类生活的年代和当时海水的温度了。

6.3 牛顿小试牛刀做“小菜”——冷却定律中的 e

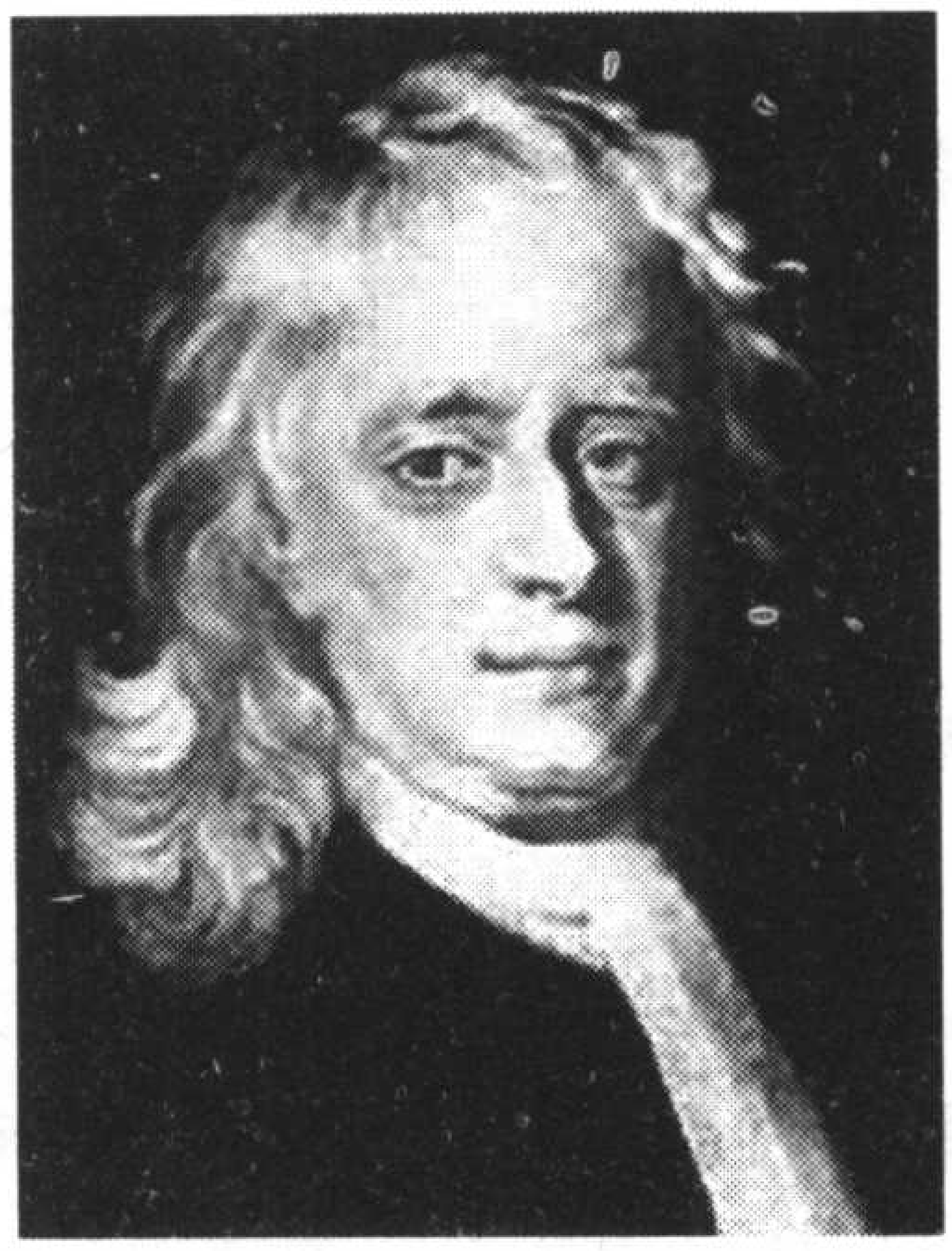


图 6-8　牛顿

一杯热水一经倒出，它就开始冷却。最初冷却得很快，随后会变得平稳。经过一段较长时间后，水的温度最终会与室温保持一致。

牛顿（图 6-8）研究了这类问题，并得出结论：一个热的温度为 T 的物体，它的冷却速度 $\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)$ 与该物体和周围环境的温度 C 的差（$T-C$）成正比，即 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-C)$；这里，$k$ 是一个由物体和周围环境物（例如空气）接触状况决定的、正的、由实验测定的“常量”，t 是时间，它前面的负号表示高于环境温度的物体会冷却。

牛顿把 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k$（$T-C$）进行积分运算，得

$$\ln(T-C)=-kt+B(B\text{ 是积分常数})$$

也就是

$$(T-C)=\mathrm{e}^{-kt+B}$$

设 $t=0$ 时物体的温度为 T_0，则上式变为

$$(T_0-C)=\mathrm{e}^{B}$$

把

$$e^B = (T_0 - C)$$

代入

$$(T - C) = e^{-kt+B} = e^{-kt} \cdot e^B$$

之中，就得到

$$(T - C) = e^{-kt} \cdot (T_0 - C)$$

这个式子就是

$$T = C + (T_0 - C)e^{-kt}$$

或

$$T_t = C + (T_0 - C)e^{-kt}$$

这个公式叫（牛顿）冷却公式或冷却定律、冷却法则。在公式中，T_t 或 T 是物体经过时间 t 之后的温度，T_0 为时间 $t=0$ 时物体的温度——如前所述。

对于各种巨大成就等身的牛顿来说，这冷却定律当然只是他小试牛刀做成的“小菜一碟”。

用冷却定律可以解释相同温度的热水，在冬天比夏天冷得更快等现象。显然冬夏不同的是环境温度 C。

下面的具体实例，可以说明如何用牛顿冷却定律计算有关问题：

有一个62℃的物体，放在15℃的空气中冷却，1分钟后，物体的温度下降为52℃，此时有 $52 = 15 + (62 - 15)e^{-k}$。由此式可求得这个问题中的 k 值。那么，就可以根据牛顿冷却公式 $T_t = 15 + 47e^{-kt}$ 求得这个物体在任意时刻的温度了。

牛顿冷却定律有广泛的用途。例如，人死亡以后，温度调节功能随即消失，因此借助于由正常体温（约37℃）与室温的比较，利用这个定律判定死亡的时间。实际计算例子如下。

某冬晨，警察局接到报案，在街头发现一尸体，6 点 30 分的时候，测量其体温为 18℃，到 7 点 30 分已降到 16℃，假设室外气温维持在约 10℃不变，且设人体正常体温是 37℃，问这个人是什么时候死的？

显然，有 $T_{7.5}=16=10+(18-10)e^{-k(7.5-6.5)}$。这里的“7.5”和“6.5”分别指 7 点 30 分和 6 点 30 分。由此可求得 $k=-\ln(0.75)\approx 0.287$，此时牛顿冷却定律的具体形式是

$T_t=10+(18-10)e^{-0.287t}$。再由 $37=10+8e^{-0.287t}$ 求得 $t\approx -4.24$，人在约 $6.5-4.24=2.26$ 小时即约 2 点 16 分的时候死亡。

又如把冰箱中的食物拿出来解冻，也可以用这个定律来计算解冻的时间。这里有一道习题供你练习。把鱼从 −5℃ 的冰箱中拿出来在室温 25℃ 下解冻，1 小时后，鱼的温度约为 10℃，问，如果希望在烹调时鱼温不低于 15℃，那最少应该在烹调前的几个小时拿出来解冻？答案是，大约 1.5 小时前。

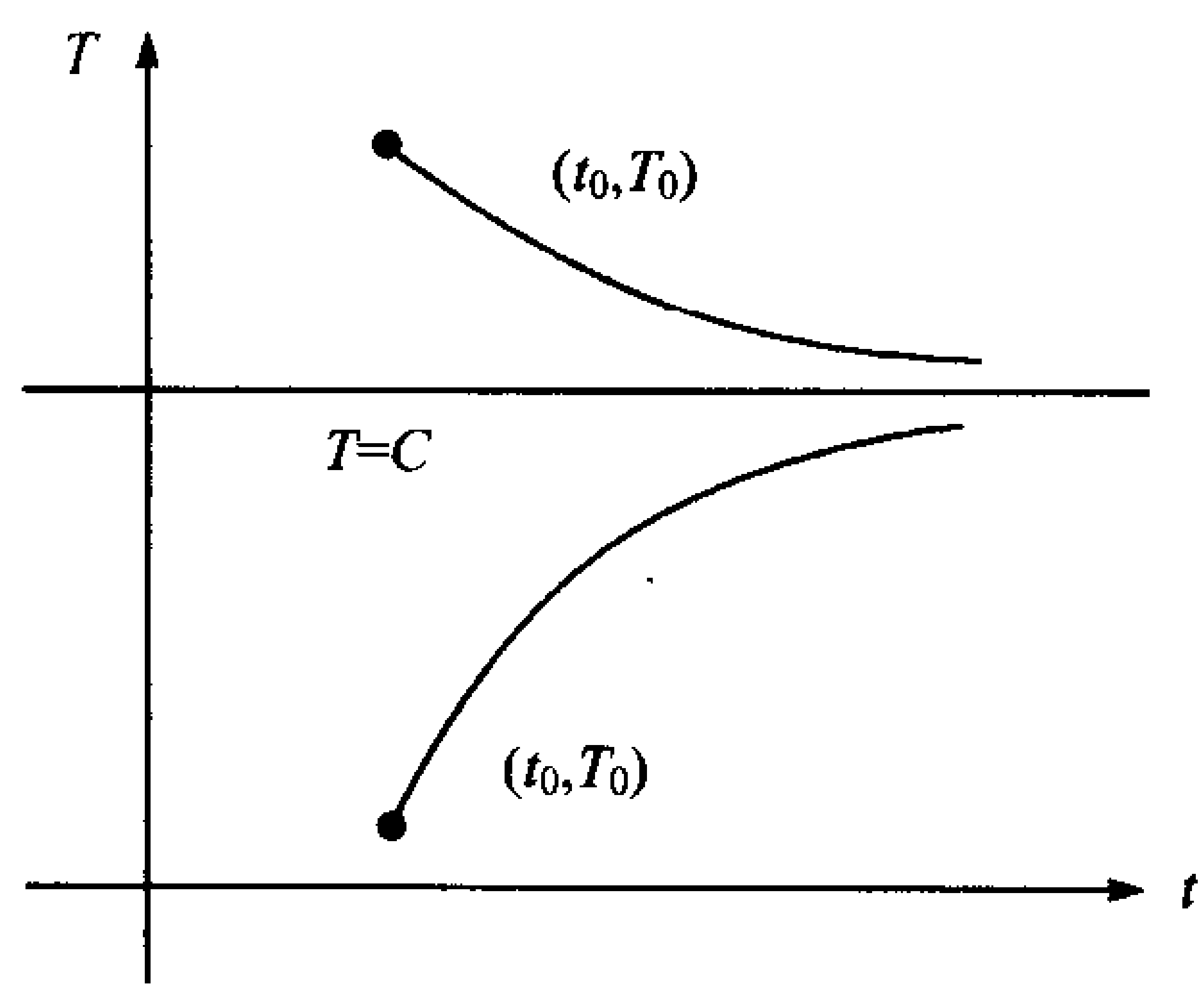


图 6-9　由冷却定律绘制的物体冷却曲线

牛顿冷却定律也适用于低温物体温度升高的计算。图 6-9 中就画出了一个高温物体冷却和一个低温物体温度升高的曲线。从这个曲线可以看出，从理论上讲，一个物体的温度如果和环境温度不一样，那它的温度只能接近而不能达到环境温度，这与冷却公式的计算是一致的——因为 $(T_0-C)e^{-kt}$ 项只

有当 $t\to\infty$ 的时候才为 0。但事实是，它不要多长时间，温度就和环境温度一致了。

值得注意的是，牛顿冷却定律中的“常量” k 实际上随时间有微小变化，不是一个真正的常量，所以牛顿冷却定律是一个近似的规律。

牛顿冷却定律只适用于在强制对流条件下。于是这个定律表述为：在强制对流条件下物体放出热量的速度正比于它的温度与使它冷却的环境温度之差。

在实际生活中，我们还会遇到如何使滚烫的开水或者咖啡迅速冷却，达到喝下去舒服的问题。

假设有一大杯滚烫的开水，不能马上喝。另外有一小杯冷开水，但冲进烫开水中仍不能马上喝。现在的问题是，为了尽快达到较低的能喝的温度，应该把冷开水立即冲到烫开水中冷却呢，还是应该把烫开水冷一段时间之后再把冷开水冲到烫开水中冷却？

你假设一些数据，再经过牛顿冷却定律计算后就可以知道，应该把烫开水冷一段时间之后，再把冷开水冲到烫开水中冷却。

当然，另外一种情形正好相反，那就是“洗脸问题”。

洗脸问题是，你刚把少量的水烧开，准备冲入适量的冷水洗脸，但此时电话铃“紧急呼唤”。为了使这些烫开水不至于在你接电话的这几分钟内变得“冷酷无情”，你应该立即冲入少量（比“适量”少一点）冷水呢，还是不冲？

正确的做法是，立即冲入少量冷水。

6.4 电、光世界的宠儿——e 和你时时相伴

电视机、收音机、录音机、数码照相机、CD, VCD, DVD 这些家用电器，已经成为当今人们不可或缺之物。

可是，你想到了吗——它们之中也有 e。

图 6-10 是许多家用电器的电路中常见的一个“*RC*”电路。其中 ε 是电源的电动势，*K* 是双掷开关，*i* 是单位时间流进电容左板的电量，*R* 和 *C*（没有充电）分别是电阻和电容，u_R 和 u_C 分别是电阻和电容两端的电压。

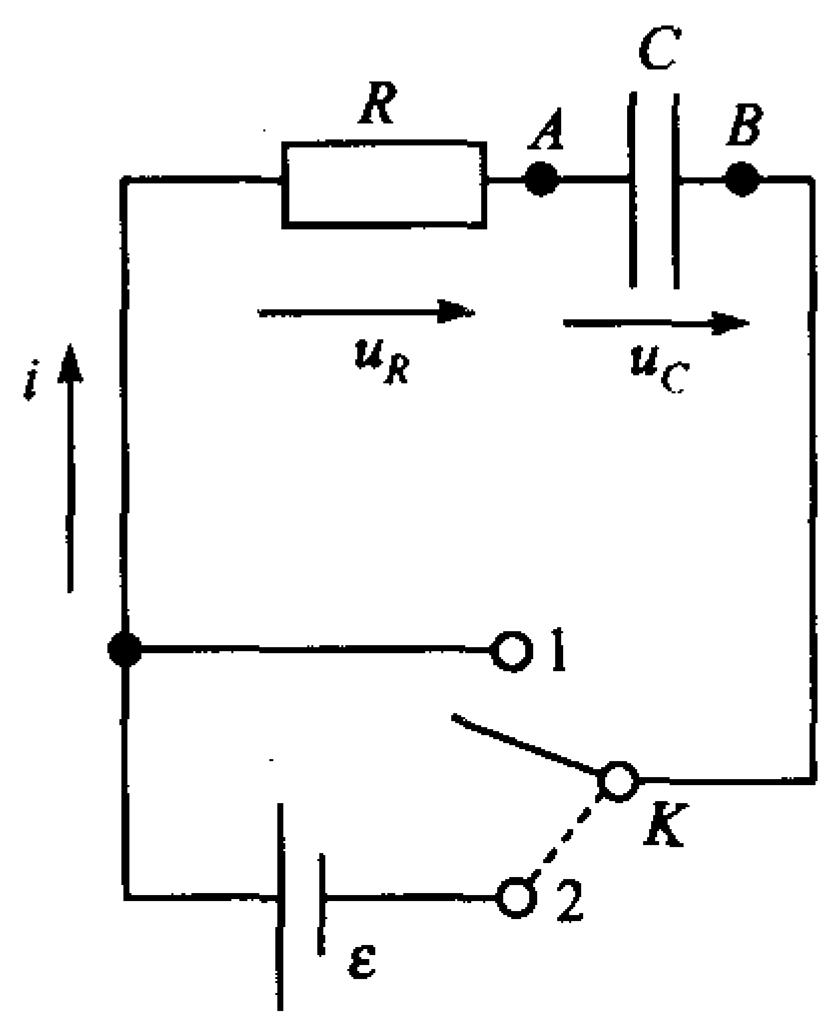


图 6-10

当双掷开关 *K* 如图 6-10 和 2 接通的时候，电源向 *C* 充电。下面我们来研究 u_C 即 $u_C(t)$ 随时间 *t* 的变化规律。

由电学可知，$u_R+u_C=\varepsilon$，而 $u_R=iR$，所以有

$$iR + u_C = \varepsilon \tag{6.5}$$

又由电学可知

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{6.6}$$

（式中是电容左板的电量，*t* 是充电的时间）

和

$$q = Cu_C \tag{6.7}$$

把（6.7）式代入（6.6）式中，得到

$$i = C\left(\frac{du_C}{dt}\right) \tag{6.8}$$

把（6.8）式代入（6.5）式，就得到

$$RC\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)+u_C=\varepsilon \tag{6.9}$$

（6.9）式就是$u_C(t)$变化规律的微分方程。

用分离变量法求得（6.9）式的通解为$u_C(t)=\varepsilon+Ae^{-\frac{1}{RC}}$（式中 A 是常数）。

当 $t=0$ 时将初始条件$u_C(0)=0$代入（6.9）式，可求得

$$A=-\varepsilon$$

所以（6.9）式的特解是 $u_C(t)=\varepsilon(1-e^{-\frac{1}{RC}})$。这个式子就是 $u_C(t)$ 随时间 t 的变化规律。你看，e 在这里出现了，也就是说 e 和你时时相伴。

根据这个规律，就可以绘制成图 6-11 所示的“RC 电路的电容充电曲线”。

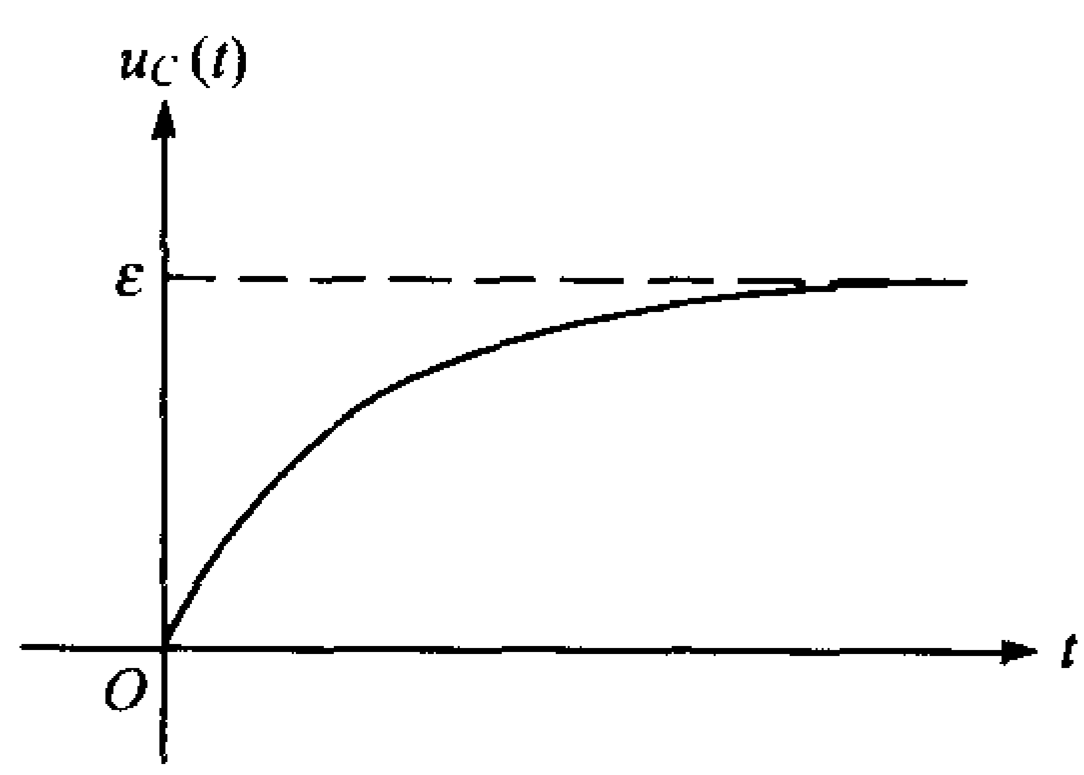


图 6-11

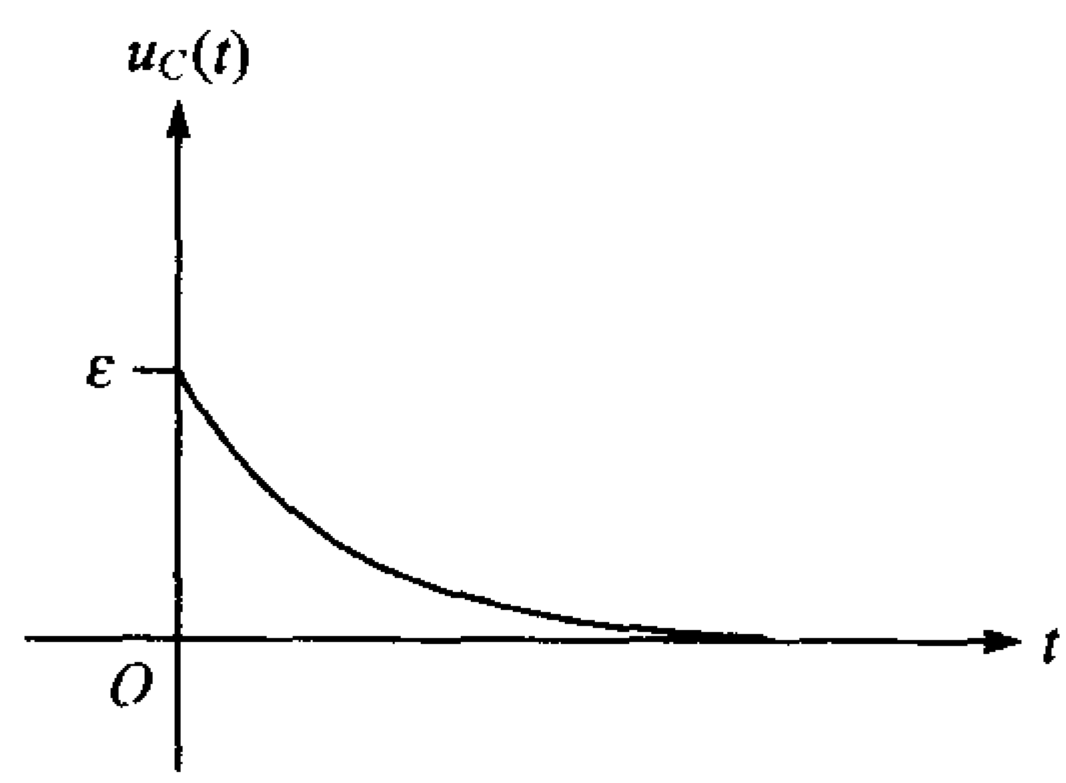


图 6-12

当电容电压充到 ε 后，如果在图 6-10 中把 K 和 1 接通，电容就开始放电。这时，也可以用类似的方法求得放电规律为 $u_C(t)=\varepsilon e^{-\frac{1}{RC}}$，这个式子中也有 e，由它绘制的“$RC$ 电路的电容放电曲线”如图 6-12 所示。

当然，电器中电路远不止 RC 电路一种，例如还有 RL 电

路（这里的 L 是电感）、CL 电路、RCL 电路等等，它们的变化规律也各不相同。但是只要涉及 C，L 的电路，在描述它们变化规律的公式中，就必定会出现 e。

不但如此，在光学中的许多变化规律也涉及 e。例如，光学中的兰伯特定律 $I = I_0 e^{-\alpha_a l}$ 就有 e。这里 I_0 是单束光或平行光的光强，I 是 I_0 经过厚度为 l 的均匀物质之后的光强，α_a 是这种均匀物质的“吸收系数”——例如一个大气压下空气的 $\alpha_a \approx 10^{-5}\text{cm}^{-1}$。我们曾经提到的德国数学家兰伯特，也是一位物理学家，他在 1760 年发现了这个定律。

如果在溶液中，兰伯特定律可以改写为 $I = I_0 e^{-ACl}$ 的形式。这里的 A 是一个与溶液浓度无关的常数，C 是溶液的浓度。为什么可以这样改写呢？因为比尔定律指出，α_a 和 C 成正比。这里提到的比尔（August.Beer，1825～1863）也是一位德国数学家，他在 1852 年发现了这个定律。

无疑，这些定律可以解释光在物质中传播后会减弱，在浓雾天、水下能见度会降低等现象。

当然光学中涉及 e 的远不是上述定律，例如散射定律 $I = I_0 e^{-\alpha l}$ 就是其中的一个，式中衰减系数 α 是吸收系数和散射系数的和。

6.5 “滴答”声中的物理公式—— 摆锤振动中的e

我们知道，在摆幅很小的时候，单摆和复摆的振动周期 T 分别是 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$（式中 l 是单摆的摆长）和 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$（式中 I 是复摆对转动轴的转动惯量，m 是复摆的质

量，b 是复摆的重心到转动轴的距离），两个式子中的 g 是当地的重力加速度。

那么，这些摆的摆幅 x 又如何随时间 t 变化呢？物理学家给出了答案。

在有阻尼的空气中，x 遵循 $x = A_0 e^{-\beta t}$ 的规律。这里 A_0 是刚开始时的摆幅，β 是一个正值的“阻尼系数”。你看，这里又出现了 e。如果你家有摆钟，e 就陪伴你了。

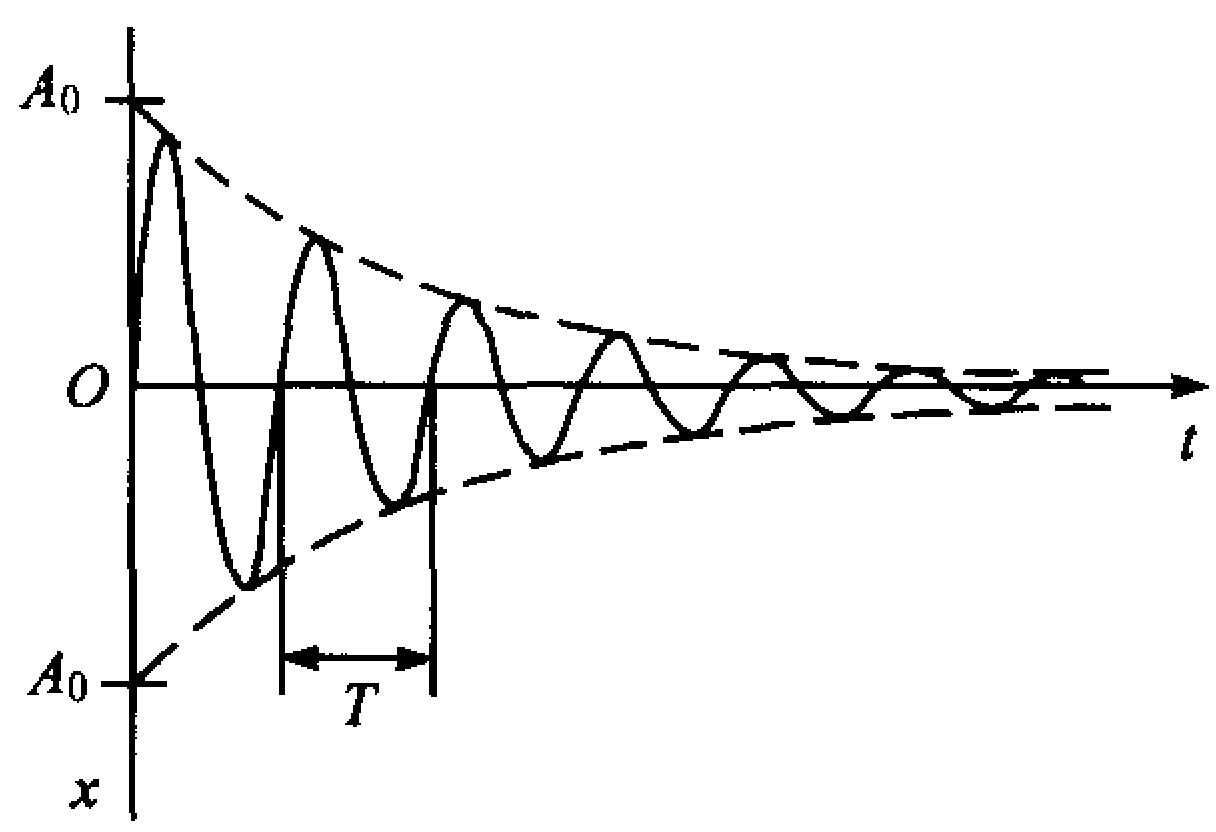


图 6-13

从这个公式中可以看到，x 将随 t 的增加而减小。这就不难解释为什么摆幅 x 将越来越小（图6-13），直到摆幅为 0 而使摆较快停下来。

那么，为什么家中的摆钟上的钟摆没有较快停下来呢？这是因为有发条给它补充能量的缘故。一旦你忘记上发条，没有给它“喂草”，它就会“偷懒”休息了。

事实上，$x = A_0 e^{-\beta t}$ 是一切阻尼振动的规律。

6.6 火箭飞天的奥秘——人类借 e 上“青云”

现代科学技术的迅猛发展，使人类可以用火箭把人造卫星、宇宙飞船等航天、宇航飞行器送入太空领域。

“地球是人类的摇篮，但人类不可能永远被束缚在摇篮里。开始他将小心翼翼地穿出大气层，然后便去征服整个太阳系。”凡是对航天科技感兴趣的人，一定熟悉齐奥尔科夫斯基的这段

名言。

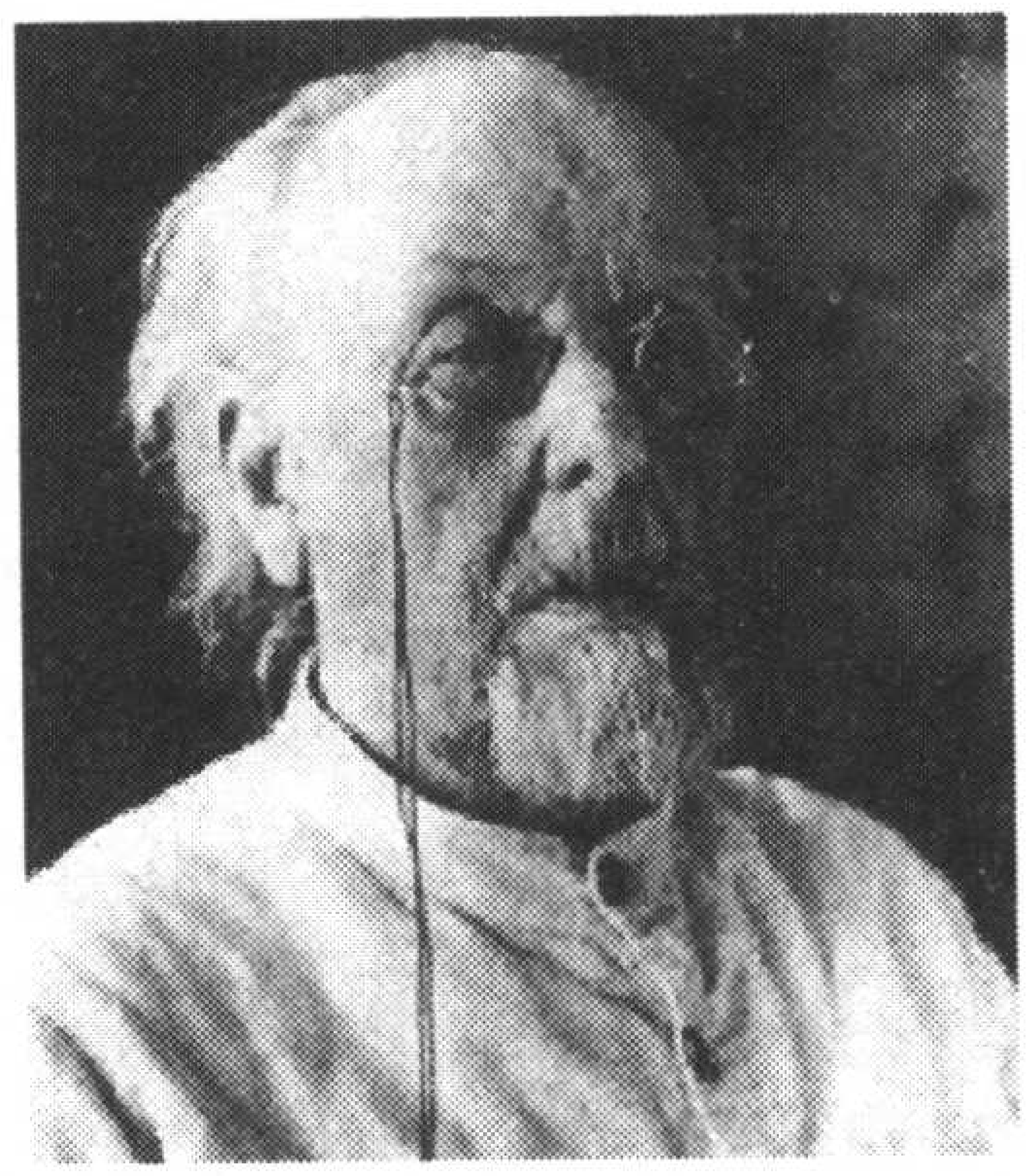


图 6-14 齐奥尔科夫斯基

我们知道，俄国星际航行先驱——“宇航之父”康斯坦丁·埃杜阿尔多维奇·齐奥尔科夫斯基（Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski，1857～1935）（图 6-14）发现，火箭的理想运动速度 v 可以用火箭运动的齐奥尔科夫斯基方程

$$v = u\ln z \qquad (6.10)$$

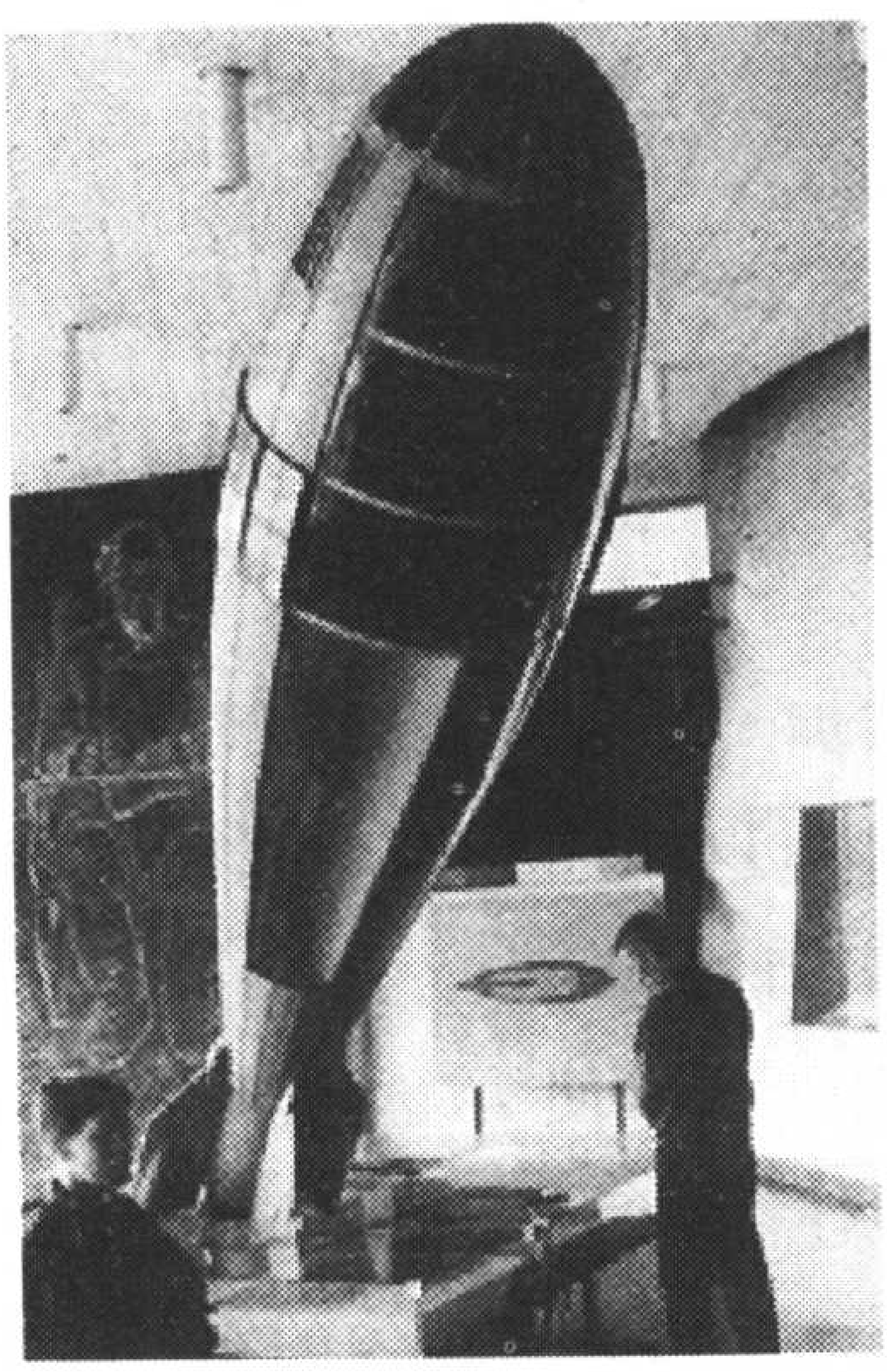


图 6-15 齐奥尔科夫斯基当年设计的飞艇模型

来描述，其中 u 是火箭发动机的有效排气速度，z 是火箭的最初质量与发动机停止时的质量之比（简称质量比）。你看，(6.10) 式中也有 e 的一份功劳。

从（6.10）式可以看出，要想提高火箭的运动速度 v，要么增加喷气速度 u，要么增加速度和质量的比 z。而火箭的最终速度至少要达到第一宇宙速度（约 7.9km/s），才能将人造卫星等送入运行轨道。

由于目前技术水平的限制，固体燃料的最高喷气速度 u 只能达到2.5km/s，液体燃料一般

为 3km/s，最好的混合液体燃料也只能达到 4km/s。同时质量比 z 也无法提高到 10 以上，即使按 $u=4$km/s，$z=100$ 的理想情形计算，火箭的理论速度虽然可以达到 km/s，但除去重力和空气阻力等造成的损失（约为 2km/s），实际速度只能达到 7km/s。这样，人造卫星等还是无法送至运行轨道。

科学家们通过研究（6.10）式之后，想到了采用多级火箭来解决火箭的速度问题，由接连的几个火箭发动机组成一个动力系统推动火箭前进：第一级发动机使火箭达到一定的速度，燃料耗尽自动脱落后第二级发动机立即接着工作，使火箭达到更高的速度，燃料耗尽自动脱落后第三级发动机再接着工作……

这样，假设各级发动机的喷气速度和质量比都相同，即

$$u_1=u_2=\cdots u_n=u,\ z_1=z_2=\cdots z_n=z$$

那么火箭的最终速度

$$\begin{aligned} v &= v_1+v_2+\cdots+v_n \\ &= u_1\ln z_1+u_2\ln z_2+\cdots+u_n\ln z_n \\ &= nu\ln z \end{aligned}$$

这个式子表明，增加一级火箭和增加一倍喷气速度，对火箭运动速度产生的效果是一样的——都可以使速度成正比地增加，而且还弥补了喷气速度不能大幅增加的困难。

现代火箭大多用的是液体燃料，可以使 u 达到 3km/s，z 达到 3，所以只需三级火箭，就可以最终达到 $v=3\cdot3\ln3$ km/s≈10km/s。即使实际损失 2km/s，也可达到 7.9km/s 的第一宇宙速度。

多级火箭的巧妙思路在于，不但能使火箭逐渐变“轻”，而且能使质量比足够“大”。

当然，由于火箭靠不断向后喷射高速气流获得动力，同时

质量减少，所以是变质量、变速度的运动。

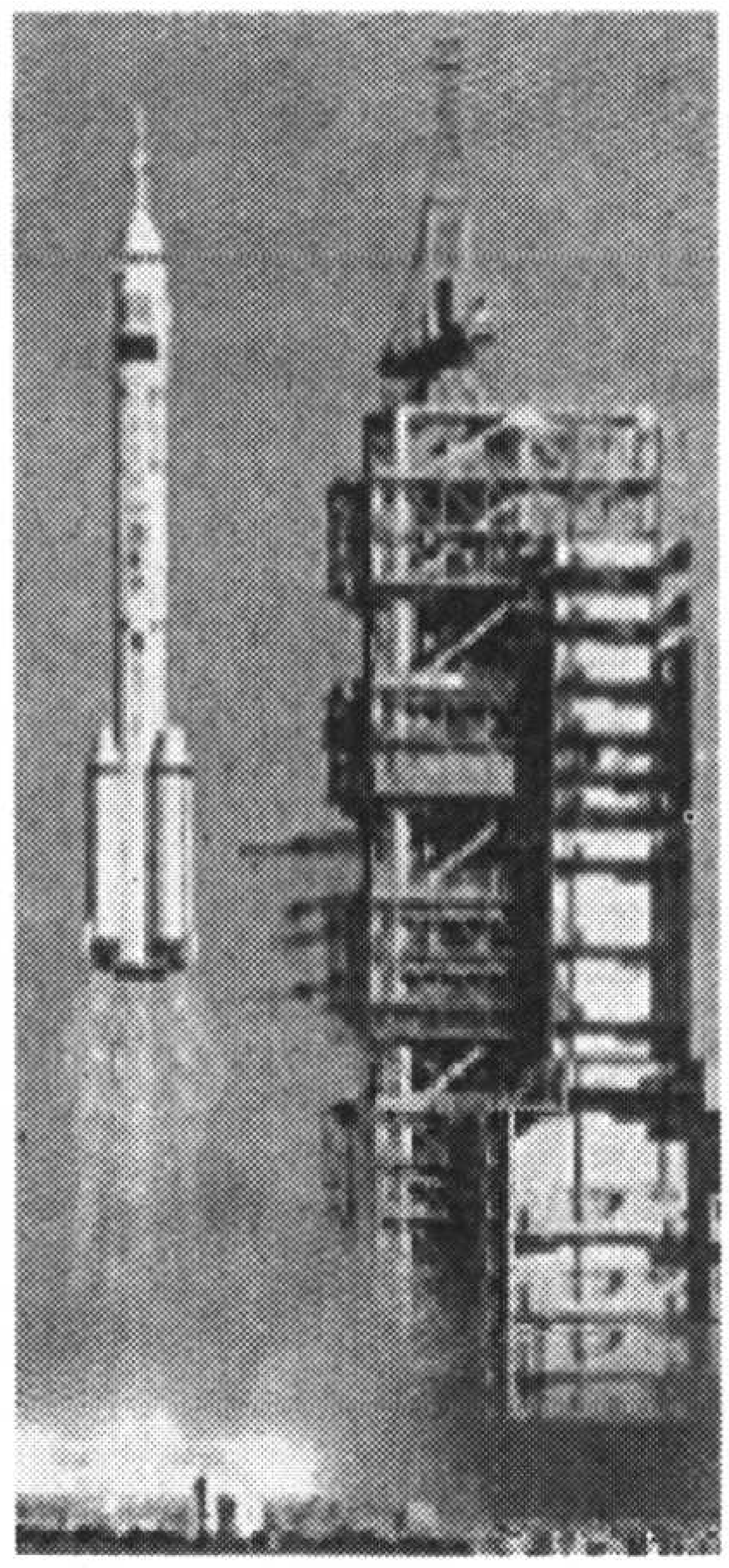


图 6-16　神舟 5 号飞船

先假设火箭在理想状态——不考虑外力因素下运动，火箭的瞬时质量为 m，u 为相对于火箭的喷气速度，它在一个微小时间 $\mathrm{d}t$ 内向后喷出的气体质量为 $\mathrm{d}m$。那么由动量守恒定理，就可以得知火箭增加的动量 $m\mathrm{d}v=-u\mathrm{d}m$（这里的“$-$”表示 $\mathrm{d}v$ 和 u 的方向相反），即 $\frac{\mathrm{d}v}{u}=-\frac{\mathrm{d}m}{m}$。当然，这里假设了喷气产生的动力通过了火箭的重心，火箭不发生偏转。

当 u 为常数时，将 $\frac{\mathrm{d}v}{u}=-\frac{\mathrm{d}m}{m}$ 积分，就得到 $\frac{v}{u}=-\ln m+C$（C 是积分常数）。

设火箭起飞时的全部质量为 m_0，当 $v=0$ 时，$m=m_0$，于是可求得 $C=\ln m_0$。所以

$$v=u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

这就是前面提到的（6.10）——齐奥尔科夫斯基方程。

有时，为了研究方便，$v=u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$ 常写成 $\frac{m_0}{m}=\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}$。

由于在以上推导中忽略了外力对或家飞行的影响，所以式（6.10）又叫火箭的理想速度方程。

如果要考虑重力对火箭飞行的影响，前面的 $m\mathrm{d}v=$

$-u\mathrm{d}m$ 就要改写为 $\frac{m\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{u\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$。由于加速度 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，按牛顿第二定律，喷气产生的推力 $F=ma=\frac{m\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{u\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$。又由于重力为 mg（其中 g 是重力加速度），所以火箭垂直于地平面向上飞行的方程就是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-mg$$

用 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 消去 $\mathrm{d}t$，就得到

$$\frac{\mathrm{d}m}{m}=-\left(1+\frac{g}{a}\right)\frac{\mathrm{d}v}{u}$$

由于 u 为常数，所以积分后就得到

$$\ln m=-\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(\frac{v}{u}\right)+C'(\text{是积分常数})。$$

当 $v=0$ 时，$m=m_0$，所以 $C'=\ln m_0$。于是得到考虑重力、火箭垂直向上运动的方程

$$\ln\frac{m_0}{m}=\left(1+\frac{g}{a}\right)^{\frac{v}{u}} \text{或} \frac{m_0}{m}=\mathrm{e}^{\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(\frac{v}{u}\right)}$$

从这个方程可以看出，加速度 a 越大，要求的质量比 $\frac{m_0}{m}$ 就越小，当 a 很大的时候，$\frac{g}{a}$ 可以忽略不计——相当于消除了重力的影响，此时 $\frac{m_0}{m}=\mathrm{e}^{\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(\frac{v}{u}\right)}$ 就变成了前面的 $\frac{m_0}{m}=\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}$。

“好风凭借力，送我上青云。”看来这个“力”中也有 e 的一份。

6.7 降落伞为什么匀速落地——落体速度与 e

“是一起着地的！是一起着地的！”

这是从远处传来的激动的吼叫声，时间是 16 世纪末。

为什么有这么大的吼叫声？原来，伽利略在众目睽睽之下，轻轻地让手里那两只球同时从塔顶下落……（图 6-17）

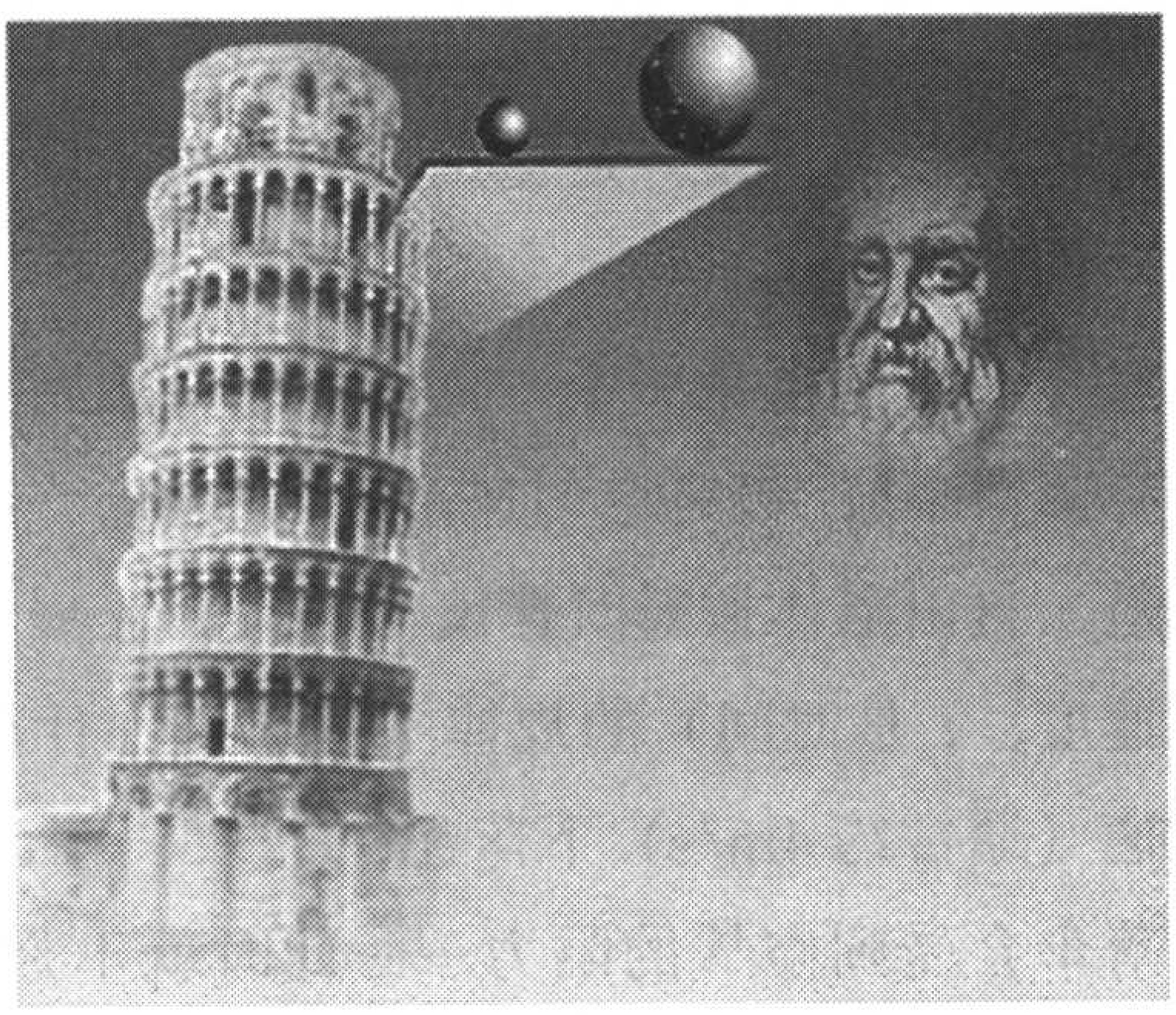


图 6-17　伽利略：在比萨斜塔上做过自由落体实验吗

这个“自由落体故事”，是我们上初中时在课堂上听老师讲的。不过有不少资料认为，这个伽利略晚年的学生维维亚尼（Vincenzo Viviani，1622～1703）在写伽利略传记中提到的故事，只不过是个谎言。

那维维亚尼为什么要编造这个谎言呢？显然，他是为了证明 2000 多年前古希腊科学家亚里士多德（Aristotle，公元前 384 至 380～前 322）的“重物比轻物落得快”的说法是错误的。

不过，为什么维维亚尼不用科学的方法证明，而是用谎言来达到这个目的呢？

原来，只有这种理想化了的实验，才可能与数学方法进行“配套”处理，于是谎言就产生了。

不过，伽利略还是用反证法证明了亚里士多德“重物比轻物落得快”的说法是错误的。他说，现在将轻、重二物捆在一起，按重物比轻物落得快的说法，这一更重的捆绑物将比重物落得还快；而按轻物比重物落得慢的说法，重物将被轻物拉着而使捆绑物比重物落得更慢。这里出现的矛盾，证明“重物比轻物落得快”的说法不对。

我们这里要讲的，也是一个“落体”——载有重物的降落伞（以下简称降落伞），最终会匀速落地的故事。

我们知道，自由落体按瞬时速度 $v = gt$($g \approx 9.8\text{m/s}^2$ 是当地重力加速度，t 是时间）的规律下落。那为什么降落伞会在后半程匀速（通常约 4m/s）下落呢？

原来降落伞会受到空气的阻力——此时就不是自由落体，也就不能用 $v = gt$ 计算了。

那为什么受到空气阻力的降落伞就会匀速下落呢？

实验表明，通常在降落伞的速度小于几米每秒的时候，空气的阻力 f 不是很大，而且和速度 v 成正比，即 $f = kv$（k 是比例系数)。

根据牛顿第二定律，并设降落伞的质量为 m，加速度为 a，就得到 $mg - f = ma$。由于 $f = kv$，就得到 $mg - kv = ma$，于是有

$$a = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

由于 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，就得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

解这个微分方程，有

$$\ln\left(v-\frac{mg}{k}\right)=-\frac{kt}{m}+C(C\text{ 是积分常数})$$

再设 $t=t_0$ 时 $v=v_0$，就得到

$$C=\ln\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)$$

所以

$$v=\frac{mg}{k}+\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}$$

这就是空气中的落体在较低的速度下，速度随时间变化而改变的计算公式。你看，e 出现在降落伞的运动公式之中了。

下面，我们用它来研究降落伞的运动。

在降落伞离开它的载体（例如飞机）下落的前半程，由于 $v_0>\frac{mg}{k}$，所以 $v_0-\frac{mg}{k}>0$，加上 $\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}>0$，所以 $\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}$ 这一项是正值，因此随着下落时间 t 的增加，降落伞的速度 $v=\frac{mg}{k}+\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}$ 显然会逐渐增大。

但是，由于 $0<\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}}<1$，所以 $\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}=(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}})^t$ 会随 t 的增加而递减。也就是说，$\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}$ 这一项是逐渐减小的，而 $\frac{mg}{k}$ 这一项是不变的，所以 v 不会无限增大。

下面分两种具体情形讨论降落伞的整个运动过程。

(1) 当 $v_0>\frac{mg}{k}$ 的时候，$v_0-\frac{mg}{k}>0$，$v>\frac{mg}{k}$，但随 t 增加而导致的 $\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$ 的减小，v 会逐渐趋近于 $\frac{mg}{k}$，最后做匀速运动。

(2) 当 $v_0<\frac{mg}{k}$ 的时候，$v_0-\frac{mg}{k}<0$，$v<\frac{mg}{k}$，但随 t 增加而导致的 $\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$ 的增大，v 会逐渐趋近于 $\frac{mg}{k}$，最后做匀速运动。

由此可见不论哪种情形，降落伞最后都是做匀速运动。

值得注意的是，我们以上的讨论，都是在 k 是常数的情形下进行的，但实际上 k 并不是常数——它会随 v 的变化而变化。此外，f 和 v 成正比的假设也是近似的——f 会随 v 的变化和 v^m（m 是一个随 v 而变化的由实验测定的正数）成正比。由于这两个主要原因，以上讨论是近似的。但是，通过进一步的计算，也可得到降落伞最后都是做匀速运动的结论。

事实上，我们还有更简单的方法来研究降落伞的运动。

由前面得到的 $mg-f=ma$ 可以讨论以下两种情形：

(1) 当 v 较小的时候，$f=kv$ 也就较小 $\Rightarrow mg-f>0\Rightarrow a>0\Rightarrow$ 降落伞速度 v 增加；

(2) 当 v 继续增加的时候，f 也按 $f=kv$ 的规律增大。当 f 增大到 mg 的时候，$a=0$。$a=0$ 就是降落伞做匀速运动。

f 是不可能大于 mg 的——谁看到过没有向上吹的风或其他动力操纵的降落伞往天上飞呢?

6.8 煮不熟的米饭——气压随高度变化公式中的e

一个登山队登上了欧洲的勃朗峰，大家兴高采烈地庆祝登顶的胜利。

但是，大家的喜悦很快就消失了——带来的食物煮不熟。原来这里的大气压只有424mmHg，水的沸点只有84.5℃——食物在沸水里煮了很久还是生的。

科学家研究发现，每升高1000m，水的沸点就要下降大约3℃，因此研究高海拔处的大气压和水的沸点之间的关系，就非常重要。

假设在海拔h(m)的高处，大气压是p(mmHg)，那么两者之间的函数关系是$p=p_0e^{kx}$。这个公式叫“等温气压公式”，这里的“等温”指h高处的气温和海拔为0处的温度一样。但是，由于这两个温度实际上不同，所以所得的结果是近似的。看，e在这里又出现了。

在$p=p_0e^{kx}$中，p_0和k都是常量。$p_0=760$ mmHg的压强，是海拔为0处的“标准大气压”。$k=-\mu gh/RT$：$\mu=2.9\cdot10^{-2}$kg/mol，是空气的摩尔质量；$g\approx9.8$m/s^2，是重力加速度的近似值；$R=8.31$J/mol·K；是气体常量；T是空气的热力学温度。

现在，假设高8848.13m的珠穆朗玛峰顶以$h=8000$m、空气温度$T=0℃=273$K计算，问峰顶的大气压是多少?

把所有数据代进公式中，有$p=760\cdot2.7183^{-\frac{0.029\cdot9.8\cdot8000}{8.31\cdot273}}=279$mmHg（的压强）。也就是说，在珠峰顶只有0.37个大

气压。

根据不同 h 得到的大气压 p 的值，再根据大气压 p 的值和沸点对应，就得到下面供登山、科考用的表 6-1。

表 6-1 （大气压和沸点的单位分别是 mmHg 和℃）

大气压	788	760	707	658	611	567	523	487	450
沸点	101	100	98	96	94	92	90	88	86

为了解决高海拔处食物煮不熟的问题，法国物理学家德尼·帕潘（Denis Papin，1647～1712）于 1679 年发明了“家用压力锅”即“高压锅”，后来人们又称为“帕潘锅”。

1680 年 12 月 8 日，英国皇家学会举行委员会会议，决定出版帕潘的书《新的烹调器》。可是帕潘在给皇家学会的献词中却谦虚地说：“这本小册子中没有称得上远见卓识的东西，对这样的赞扬受之有愧。”

有趣的是，帕潘就是到阿尔卑斯山旅游发现高山上的食物难以煮熟，从而做出这项发明的。

气压公式是 17 世纪末以后许多科学家研究大气压强的经验所得。英国天文学家哈雷（Edmund Halley，1656～1742）在分析了德国物理学家格里克（Otto von Guericke，1602～1686）和意大利物理学家托里拆利（Evangelista Torrieelli，1608～1647）的实验之后，得到 $h=A\ln(B/C)$ 的结果。这个式子中的 A，B，C 都是常数。

1823 年，拉普拉斯第一次用密度的形式来表示气压公式：$\rho=\rho_0 e^{-\alpha h}$。这个式子中的 ρ 和 ρ_0 分别是研究点和海平面的气压，α 是常数。

6.9 从麦克斯韦到玻耳兹曼——刻在墓碑上的 e

奥地利首都维也纳中央墓地，一座墓碑——一座自杀者的墓碑。

墓碑上的名字上方，端端正正地刻着一个公式：$S=k\ln\Omega$。

这是谁的墓碑，为什么要刻上一个公式，这个公式有什么用，他为什么要自杀？

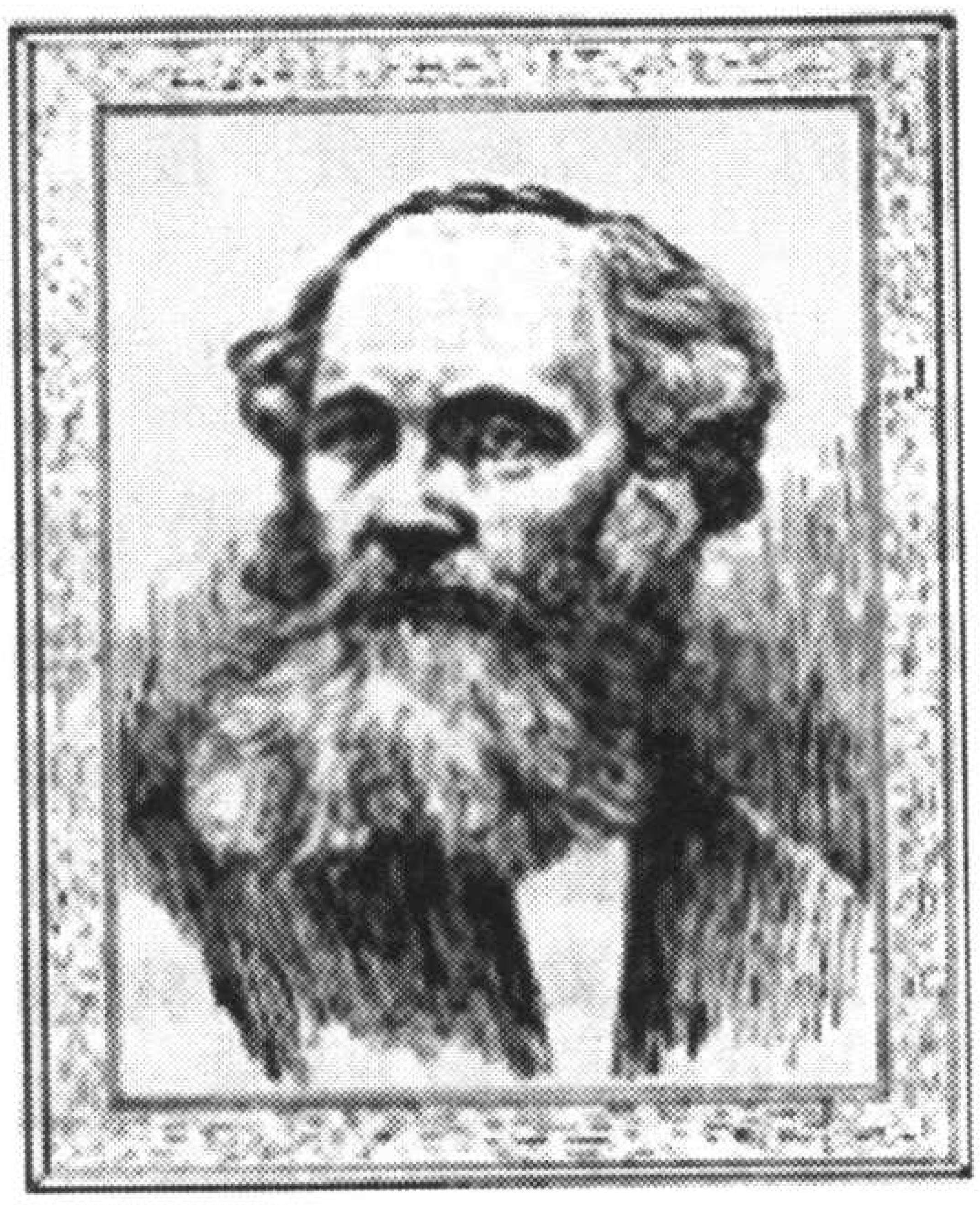


图 6-18 麦克斯韦

我们把时钟拨回到 1858 年。这一年，德国物理学家克劳修斯（Rudolf Julius Emmanuel Clausius，1822～1888）发表了论文《气体分子的平均自由路程》。文中提出了气体分子在没有遇到其他分子作用球而自由通过厚度为 x 的空间的几率为 $W=\mathrm{e}^{-\alpha x}$，式子中 α 是与作用球面积有关的待定常数。这样，e 就走进了统计物理学。

那么，克劳修斯为什么要写这篇论文呢？原来他是为了回答他的同胞布斯-巴罗特（C.H.D.Buys-Ballot）对分子运动论的责难。布斯-巴罗特发表在同年的 2 月号《物理学年鉴》上的论文的责难之一是：既然分子速度达到几百米/秒，为什么烟尘在室内不动的空气中会停留很久呢？

大约一年以后的 1859 年 4 月，英国物理学、数学家麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831～1879）（图 6-18），偶然读

到了《气体分子的平均自由路程》，很受鼓舞，重新点燃了他原来在土星环卫问题上运用概率理论的信念，决定用概率理论研究分子运动问题。

麦克斯韦的努力没有白费，在这一年，他就发现了大数分子 n 的“麦克斯韦分子按速率分布定律”

$$\Delta n = 4n\mathrm{e}^{-u^2}u^2\frac{\Delta u}{\sqrt{\pi}}$$

式中 Δn 为相对速率介于 u 和（$u+\Delta u$）之间的分子数。

而分子的算术平均速率公式

$$\bar{v} = v_B\int_0^{\infty}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}u^3\mathrm{d}u$$

也被发现。式中的 v_B 是分子的最可几速率。

此外，麦克斯韦还发现了“麦克斯韦分子按速度分布定律”

$$\Delta n_c = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}n\mathrm{e}^{-\frac{E_k}{kT}}\Delta v_x\Delta v_y\Delta v_z,$$

式子中的 n 是在热平衡状态下的某种大数气体分子，Δn_c 是速度为 v 的 x，y，z 分量分别介于（$v_x+\Delta v_x$）、（$v_y+\Delta v_y$）、（$v_z+\Delta v_z$）之间的分子数，m 是一个分子的质量，E_k 是分子的平动能，k 是著名的玻耳兹曼常量（Boltzmann constant），T 是热平衡时的热力学温度。

你看，上面的三个公式都离不开 e。

研究统计物理学和热学的车轮继续前进。

1871 年，奥地利物理学、数学家玻耳兹曼（Ludwid Eduard Boltzmann，1844～1906）（图 6-19）连续发表了两篇论文：《论多原子分子的热平衡》、《热平衡的某些理论》。在论文中，他研究了气体在重力场中的平衡分布，则分布函数是



图 6-19 玻耳兹曼

$$f = \alpha e^{-\beta\left(\frac{mv^2}{2+mgz}\right)} \qquad (6.11)$$

式中 m 是分子的质量，mgz 为分子的位能，α 和 β 为取决于温度的常数，v 为分子的速度。

后来，玻耳兹曼又进一步把 (6.11) 式推广到任意位场中，得到

$$f(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = \alpha e^{-\beta\left[\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2+U(x,y,z)}\right]} \qquad (6.12)$$

式中 $U(x, y, z)$ 表示分子在位场中的位能。

(6.11) 和 (6.12) 式就是著名的“玻耳兹曼分布”。

再后来，又表示为

$$f = \alpha e^{-\frac{E}{kT}} \qquad (6.13)$$

式中的 $E=\sum\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\sum V$。(6.13) 式是统计物理学的重要定律之一。

1877 年，玻耳兹曼进一步研究了热力学第二定律的统计解释，在第二定律和热力学几率 W 的关系中，证明了熵 S 与 W 的自然对数成正比。1906 年，德国物理学家普朗克（Max Planck，1858～1947）把这个关系式写成 $S=k\ln W$，就是前面提到的 $S=k\ln\Omega$。和前面一样，这里的 k 也是玻耳兹曼常量。

$S=k\ln\Omega$ 首先把熵定义为热力学几率的对数，揭示了熵增加原理的微观实质，是一个十分重要的公式。例如，普朗克就曾用它推导出辐射量子定律。这个公式不但是热力学第二定

律的统计解释的基础，而且是现代信息论的基础，同时也是一个十分简洁优美的公式。

此外，在热力学研究中，玻耳兹曼还发现了“玻耳兹曼分子按能量分布定律”和它的常用形式——“玻耳兹曼分子按势能分布定律”。这两个公式中也有 e。限于篇幅和公式较繁，前一个定律不拟写出，后一个定律在 6.12 中可以看到。6.8 中的等温气压公式，也可以从这两个定律推导出来。

不幸的是，虽然当时人们对于宏观热力学理论有了比较深刻的认识，但描述微观热力学的统计理论还处于萌芽阶段，所以，人们不但没有认识到玻耳兹曼的工作的重大意义，反而对他进行围攻，使他长期孤军奋战，终于悲观厌世，郁愤成疾，以致曾想自杀。

1906 年 9 月 5 日，玻耳兹曼终于在去里雅斯德的旅行途中，突然在里雅斯德附近的杜伊恩（Duino）自杀身亡。后来，人们为了纪念这位统计物理学和物理动力学创始人之一的他，为他建立了刻有 $S=k\ln\Omega$ 的墓碑……

由杰出科学家玻耳兹曼的自杀事件，联系到当今形形色色的自杀现象，使我们不得不非常关注社会的理解、关爱和个人的心理健康这两个重大的课题。

6.10 速度和焓变——化学反应也离不开 e

化学反应速度是科学家们关心的重要问题。

从德国人威廉米在 1850 年对化学反应速度首先进行定量研究，并得出化学反应过程的第一个数学表达式开始，经过许多科学家的研究，最后由瑞典化学家阿仑尼乌斯（Svante

August Arrhenius，1859～1927）得到反应速度常数 k、频率因子 Z、活化能 ε 与反应温度 T 的关系方程式——阿仑尼乌斯公式。

设 $R = 8.314\text{J/mol}\cdot\text{K}$ 是摩尔气体常量，阿仑尼乌斯在1889年根据经验得到的阿仑尼乌斯公式为

$$k = Ze^{-\frac{\varepsilon}{RT}}$$

从这个公式可以看出，e出现在其中。还可以看出，标志反应速度的 k 随 T 的增加而急剧增大，这可以解释我们在做化学实验时经常爱加热等现象。

阿仑尼乌斯公式有广泛的用途：如测某个化学反应的 k，Z，ε 等，以实现对化学反应的监测。

化学中有e的公式不止一个。

大学生们在结识熵、焓这些“难懂”的“新朋友”时，感到很“头疼”，就说得了“伤寒病”。其实，和任何事物一样，不懂就难，懂了就不难。“世上无难事，只要肯登攀。”有此信念，就会无往而不胜。

我们用 G 表示自由焓，ΔG 表示自由焓变化，ΔG°表示标准状态下自由焓变化，那么对于反应

$$aA + bB = gG + dD(a, b, g, d \text{ 分别是系数})$$

在等温等压条件下，就有

$$\Delta G = \Delta G^\circ + RT\ln\frac{(p'^g_G \cdot p'^d_D)}{(p'^a_A \cdot p'^b_B)}$$

式中 p'_A，p'_B，p'_G，p'_D 分别表示物质 A，B，G，D 处于任意状态（通常指非平衡状态）时的分压（例如反应起始时的分压）。

这个公式的作用是大体判断某个化学反应能否进行。

你看，e 出现在又一个化学反应的公式中了。

6.11 植物学“联姻”物理学——布朗运动中的 e

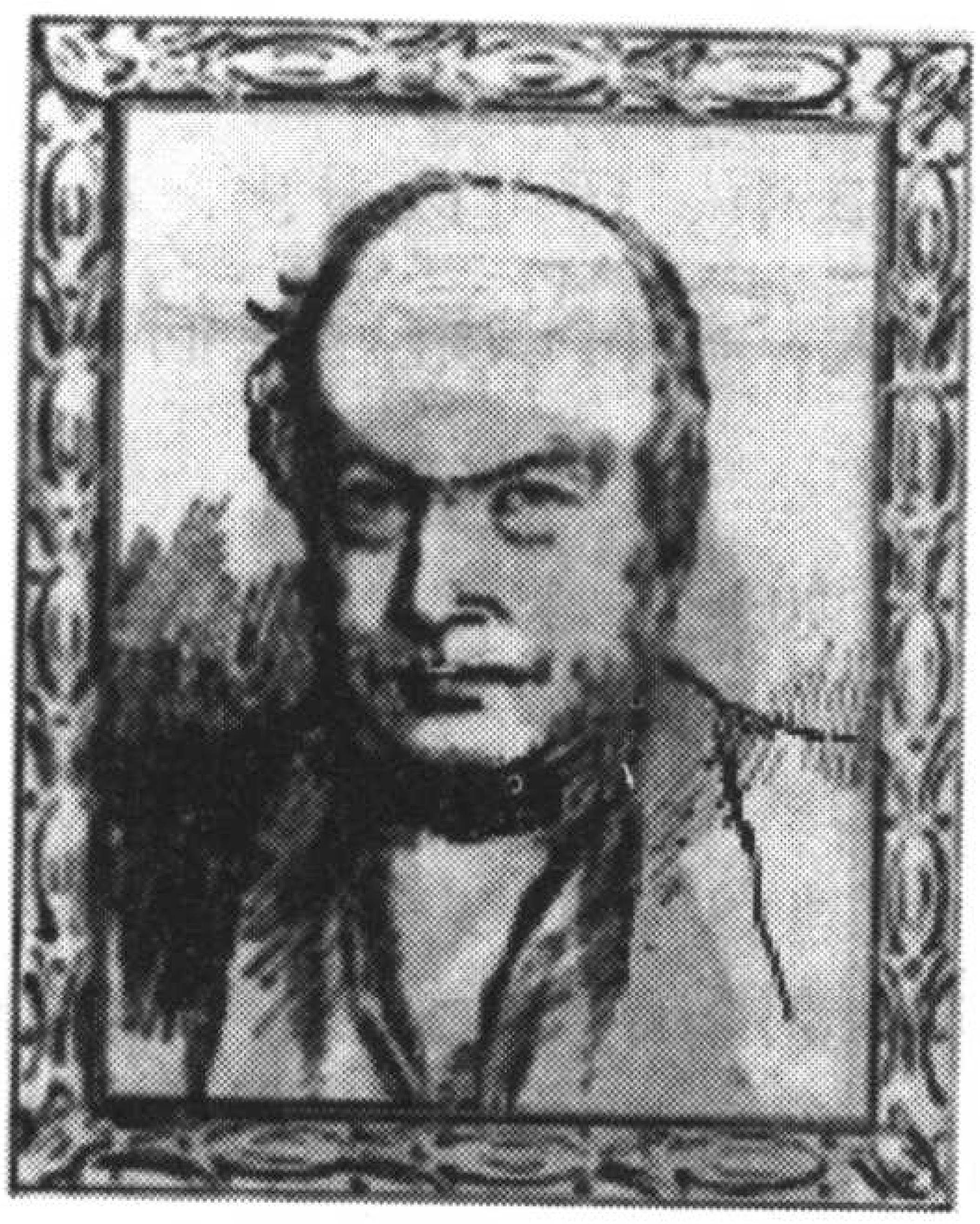


图 6-20 布朗

1827 年 6 月的一天，英国植物学家布朗（Robert Brown，1773～1858）（图 6-20）同往常一样，用显微镜观察克拉花的花粉标本。他偶然发现：悬浮在液面上的花粉微粒，总是在一上一下不停地无规则地运动。

是什么力使这些花粉不“安分守己”呢，它的运动又有什么规律呢？

经过先后许多科学家的研究，原来布朗运动是由于花粉微粒与水分子碰撞的结果。而它的运动规律则最终被爱因斯坦、波兰物理学家斯莫路霍夫斯基（M. von Smoluchowski，1872～1917）、法国物理学家朗之万（P. Langevin，1872～1946）等，特别是法国物理学家佩兰（Jean Baptiste Perrin，1870～1942）揭开。

设 $\rho=\rho(x,t)$ 是一个布朗运动粒子在时间 t 和位置 x 时的概率密度。如果粒子在 $t=0$ 的位置是 $x=0$，在某些概率假设下，爱因斯坦在 1905 年导出

$$\rho(x,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\right)^3 e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}$$

这里 D 表示一个正常数——扩散系数（Diffusion coefficient）。可以看到，e 出现在这个“植物学公式”之中。

爱因斯坦关于布朗运动的两篇论文中的一篇，发表在 1905 年 5 月 11 日的《物理年鉴》上。

1923 年，美国控制论专家和数学家维纳（Norbert Wiener，1894～1964）首先把布朗运动当做一种随机过程（Stochastic Process）来研究，因此布朗运动也叫维纳过程（Wiener process）。如今，布朗运动在理论和运用上已与泊松过程（Poisson process）构成了两种最基本的随机过程。一个植物学的观察，引出了众多物理学成果，并且和 e 联系在一起，这是科学史上的一段趣闻佳话。

6.12 阿氏常数这样测——“微粒公式”借 e 建功

通过 1805 年的实验，法国物理学、化学家盖·吕萨克（Joseph Louis Gay-Lussac，1778～1850）（图 6-21）在 1808 年指出，同温、同压、同体积的不同气体，应含有相同数目的原子。但他的这个假说遭到英国化学家道尔顿（John Dalton，1766～1844）等的强烈反对。

1811 年，意大利化学家阿伏伽德罗（人名的意大利文很长，简写为 Amedeo Avogadro，1776～1856）（图 6-22）发表了题为《原子相对质量的测定方法及原子进入化合物时数目比例的确定》的论文，以盖·吕萨克的实验为基础，引入“分子”（把盖·吕萨克说的“原子”改为“分子”）概念，并把分子与原子的概念区别和联系起来，提出了著名的“阿伏伽德罗定

律”。这个定律和前面说到的盖·吕萨克的假说本质一样。



图 6-21　盖·吕萨克



图 6-22　阿伏伽德罗

当别人赞美阿伏伽德罗的创见时，他谦虚地说，他的理论不过是盖·吕萨克假说的发展。

同样遗憾的是，阿伏伽德罗定律当时也没有得到承认。直到半个世纪之后的1860年，由于另一位意大利化学家康查罗尼（Stanislao Cannizzaro，1826～1910）的力证，才得到科学界的公认。

由阿伏伽德罗定律可知，1mol的任何物质都含有相同的微粒数目，这个数目就是阿伏伽德罗常数（简称阿氏常数）N。

下面，我们来看测定 N 的一种方法。

设势能为0处的分子密度是 n_{00}，势能为 E_p 处的分子密度是 n_{0r}，$k=1.381\cdot10^{-23}$J/K 为玻耳兹曼常量，T 是热平衡的热力学温度，那么著名的“玻耳兹曼分子按势能分布定律”（简称“玻耳兹曼定律”）就是

$$n_{0r} = n_{00}e^{-\frac{E_p}{kT}} \qquad (6.14)$$

如图 6-23，在重力场中取一处于热平衡和力学平衡状态的气柱，设 $h=0$ 处单位体积的分子数（即分子密度）为 n_{00}，根据玻耳兹曼定律，就得到高 h 处单位体积的分子数 n_{0h} 为

$$n_{0h} = n_{00}e^{-\frac{mgh}{kT}} \qquad (6.15)$$

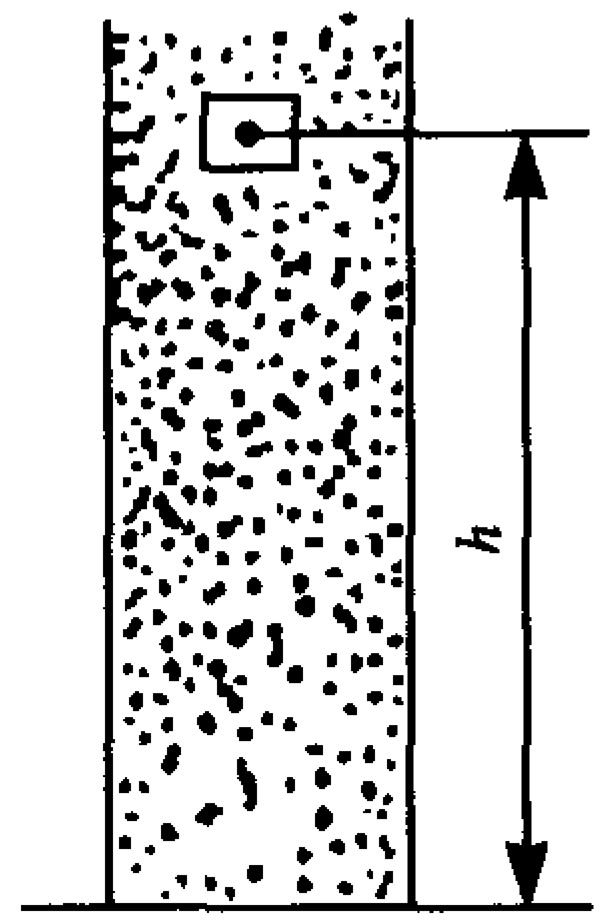


图 6-23

这里的 mgh 就是在高 h 处分子的势能 E_p，(6.15) 式就是“微粒按高度分布定律”，即我们标题中说的“微粒公式”。这个定律也适用于液体。

下面，我们用这两个定律结合布朗运动来测定阿氏常数 N。

设一种液体的密度为 σ，其中一个布朗微粒的质量为 m，密度为 ρ，则体积就是 $\frac{m}{\rho}$，所受到的浮力为 $\frac{m\sigma g}{\rho}$。这样，这个布朗微粒的表观重量就是

$$mg - \frac{m\sigma g}{\rho} = mg\left(\frac{\rho-\sigma}{\rho}\right)$$

而这个布朗微粒在重力场中的势能就是

$$E_p = mgh\left(\frac{\rho-\sigma}{\rho}\right) \qquad (6.16)$$

把 (6.16) 式代入 (6.14) 式，并应用 $k=\frac{R}{N}$（$R=8.314\text{J/mol}\cdot\text{K}$ 为摩尔气体常量）就得到

$$n_{0h} = n_{00}e^{-\frac{Nmgh(\rho-\sigma)}{RT\rho}}$$

这个式子就是

$$N = \frac{\rho RT}{mgh(\rho - \sigma)}\ln\left(\frac{n_{00}}{n_{0h}}\right) \tag{6.17}$$

从（6.17）式可以看出，只要测得难测的$\frac{n_{00}}{n_{0h}}$和 m，就可算得 N，因为其他的量要么已知，要么容易测定。

这个困难的任务由法国物理学家佩兰在 1909 年完成。他在研究藤黄微粒在水中的布朗运动时测得$\frac{n_{00}}{n_{0h}}$，并利用斯托克斯公式测得 m。他算得 $N = 7.2 \cdot 10^{23}$/mol（一说 $6 \cdot 10^{23}$）。当然，现在所用的更准确的值是 $6.022 \cdot 10^{23}$/mol。这里提到的斯托克斯（George Gabriel Stokes，1819～1903）是一位英国物理学家和数学家，他发现了描述粘滞流体阻力的斯托克斯公式。

尽可能准确地测定 N 值，是物理学和化学的重要课题。

为此，科学家们发明了包括诸如放射性法、油滴法在内的多种方法，而且“热潮”持续到大约 20 世纪 80 年代。例如，在 1983 年，美国国家标准局用 X 光-光学干涉仪，由德拉特斯（Deslattes）测得 $N = 6.022\,097\,3(72) \cdot 10^{23}$/mol，而同年联邦德国物理研究所贝克等测得的 $N = 6.022\,129\,7(72) \cdot 10^{23}$/mol。两个数值的差别被解释为系统误差而非样品不同引起。

6.13 生存竞争——弱肉强食方程中的 e

在一个海岛上住着狐狸和野兔。狐狸吃野兔，野兔吃翘摇草。当翘摇草生长旺盛的时候，野兔就多，狐狸也容易得到美餐，总数也就多了起来。但是，当狐狸数量多到没有足够的野兔充饥的时候，一部分就会因饿死和相互间的残杀而使总数减少。狐狸数量一减少，野兔相对就安全一些，总数又会增多，

这又会引起狐狸总数新一轮的增加……

这就是生物之间弱肉强食的斗争和依存关系——“食物链”。

说起食物链，还有一段有趣的故事呢！1942年，美国明尼苏达大学的一位20多岁的青年学者林德曼（Limdman），受到中国“大鱼吃小鱼，小鱼吃蚂虾，蚂虾吃泥巴”、“一山不存二虎”的启发，对达尔沼泽湖生态系统的营养结构进行了三年研究之后，终于首先提出了食物链（food chain）这个概念，并创立了相关理论。

当然，最早对类似问题进行研究的倒不是林德曼。在1859年出版的生物进化论巨著《物种起源》中，英国生物学家达尔文（Charles Robert Darwin，1809～1882）就说，他曾观察到“猫多羊就多”的现象，研究结果是这样一条生物链：猫多→鼠（吃丸花蜂，破坏蜂窝）少→丸花蜂（传授花粉）多→三叶草多→羊多……

而中国古代的著作——例如战国时期的《庄子·山木篇》中，则更早记载着生物彼此之间的相互斗争和依存的关系。

那么，前面所说的狐狸和野兔之间的数量关系究竟怎样呢？

最早用定量公式描述它们之间的数量关系的，是意大利数学家沃尔泰拉（Vito Volterra，1860～1940）。他用数学方法对生存竞争、弱肉强食现象进行研究之后，得到了定量的“沃尔泰拉弱肉强食方程组”

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mx-nxy\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-py+qxy\end{cases}$$

在这个方程组中，x 和 y 分别代表野兔和狐狸在 t 时刻的数量，$\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 分别是野兔和狐狸的繁殖速度。m，n，p，q 分别是正的常数。mx 表示野兔因草丰而增加的数量，$-py$ 表示狐狸因种群扩大造成饥荒而减少的数量。xy 代表两者相遇的机会，所以 $-nxy$ 和 qxy 分别代表野兔和狐狸因相遇而减少和增加的数量。

求解这个微分方程，就可以得到 $y^m e^{-ny} = kx^{-p}e^{qx}$（式中 k 是正的常数），这就是野兔和狐狸的弱肉强食关系。看，e 又出现在弱肉强食的生物链中了!

用 $y^m e^{-ny} = kx^{-p}e^{qx}$，可以绘制出野兔和狐狸数量关系的曲线——一条封闭曲线。这就表明，两者的数量会周期性增减，始终呈波动性的生态平衡，而这正是我们所希望看到的。

说到生物链，我们要多说几句这个与当今的“热点”——环境相关的问题。

为了保护美国北亚利桑纳州的凯巴伯森林中的 4000 头鹿，在 1906 年，西奥多·罗斯福（Theodore Roosevelt，1858～1919）总统（1901～1909 在任）宣布凯巴伯森林为全国狩猎保护区。至 1942 年，鹿到是增加到了 10 万头，但它们却遭到巨大的灾难——森林所有的植物叶子经不住它们的饕餮大餐而荡然无存，最后鹿也只剩下 8000 头。

这种破坏生态平衡的例子不胜枚举。人们为了得到更多的鱼而捕杀以鱼为食的水獭，但发现水獭被“斩尽杀绝”之后，鱼也消失了。后来人们才知道，原来水獭吃的鱼中的大部分，是游得慢的病鱼，水獭及时吃掉它们之后才防止了鱼瘟的蔓延。

由此可见，爱护环境、保持生态平衡是多么重要。因此，

美国生物学家、世界第一女环保斗士蕾切尔·路易斯·卡森（Rachel Louise Carson, 1907～1964）（图 6-24）的话，应是使我们警醒的座右铭：“我们必须与其他生命共同分享我们的地球。”



图 6-24　卡森在搜集农药危害的证据

用数学方法研究生物学的学科称生物数学，属于应用数学的一个分支。生物数学是在 1901 年创立的，其标志是英国数学家、生物统计学的奠基人皮尔逊（1857～1936）创办的《生物统计学》杂志的问世。1939 年，苏联数学家拉舍夫斯基（Петр Константинович Ращевский, 1907～）创办了《数学生物物理通报》杂志，把数学和物理学的方法引进生物学的研究之中，使生物学得到进一步的发展。

6.14 如何预测鼠疫病人数——疾病研究中的 e

“万能的上帝公正而严厉，带着瘟疫莅临剑桥城。”名扬世界的“伟人的母亲”——剑桥大学的一位学院教长这样写道。这是怎么回事？

原来，从 1665 年 6 月开始，瘟疫降临到英格兰的许多地方。这种瘟疫就是黑死病，又名淋巴腺鼠疫，最初于 1347 年在欧洲出现，没想到这次又“光临”英伦，在夏季伦敦就有

$\frac{1}{10}$的人死亡。黑死病的初期症状是剧烈的头痛和眩晕，接着就四肢颤抖、腋下和腹股沟肿胀、高烧，最后皮肤出现黑斑，象征着死神来临。

对于这种传染速度极快的疾病，人们当时束手无策，只能求助于罗马人的一句著名格言："快快地逃走，远远地躲开，迟迟地回来。"于是，这一年的 8 月 7 日，牛顿所在的剑桥三一学院"关门大吉"，学生一律回家。当然，他在此前已经"远远地躲开"——回到他的家乡英格兰东海岸林肯夏郡的沃尔斯索普小镇。接着在 10 月，剑桥大学的评议会也投票决定关闭整个学校。

接下来的故事众所周知：在"牛顿奇迹年"里，牛顿研究微积分、二项式定理、万有引力、解析白光……直到 1667 年 4 月才回剑桥——其间他曾短暂回校。

那么，这鼠疫为何传播得这么快呢？这就要靠 e 来揭开"秘密"了。

设 x 是患鼠疫的人数，y 是接近这些人而被传染的人数，它们都是时间 t 的函数，那么 x 和 y 就满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mxy - nx \tag{6.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -mxy \tag{6.19}$$

其中 m 和 n 分别是不一定相同的正的常数。(6.18) 式中的 mxy 表示容易被传染人群中变成鼠疫患者的增速，$-nx$ 表示患鼠疫者因病死而减少的速度。(6.19) 式中的 $-mxy$ 表示容易被传染人群因感染鼠疫之后，被传染人群减少的速度。

用 (6.18) 式除以 (6.19) 式，就得到

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1+n}{my} \tag{6.20}$$

即

$$dx = \left(\frac{-1+n}{my}\right)dy \tag{6.21}$$

把（6.21）式两边积分，并用初始条件 $x = x_0$，$y = y_0$，就得到

$$x = x_0 + y_0 - y + \left(\frac{n}{m}\right)\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{6.22}$$

看 e 出现在预测鼠疫病人数的计算公式之中了。

从（6.20）式可以得到以下两个结果：一是当 $y>\frac{n}{m}$ 的时候，$\frac{dx}{dy}<0$，x 是以 y 为自变量的单调递增函数。二是当 $y<\frac{n}{m}$ 的时候，$\frac{dx}{dy}>0$，x 是以 y 为自变量的单调递减函数。

这两个结果告诉我们，鼠疫初期（即 $y>\frac{n}{m}$ 的时候），感染鼠疫的人增加很快，我们应加强这早期的控制；到了鼠疫后期（即 $y<\frac{n}{m}$ 的时候），虽然感染鼠疫的人增加较慢，但已经造成许多人死亡。总之，应加强早期的控制，才能有效减少灾难的损害。

当今世界，包括“非典”（SARS）、艾滋病、禽流感、登革热等在内的传染病正经常或间断袭击人类，我们应该有加强早期控制的意识，不能麻痹大意而等到“泛滥成灾”——像 2003 年的“非典”那样，造成重大损失之后才“手忙脚乱”。

6.15 从人类到细菌——生物增殖中的 e

如果不控制人口增长，到 2555 年，世界人口将达到 364 万亿，平均每人只有大约 0.42m^2 的栖身之地！

这不是危言耸听，而是科学预测。

那么，科学家们又是根据什么预测的呢？

1798 年，英国著名经济学家托马斯·罗伯特·马尔萨斯（Thomas Robert Malthus，1766～1834）匿名出版了名作《人口原理》。这本在他生前就出了六版的书，根据“食物为人类生存所必须和两性间的情欲是必然的”这两条“永恒的法则”出发，提出了“算术级数增长的粮食跟不上几何级数增长的人口，如果不抑制人口增长，人类将面临生存危机”的观点。

那么，我们就来看一看人口是如何按几何级数增长的吧！

假设 t 时刻的人口数为 $f(t)$，由于人口增长速度 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ 和 $f(t)$ 成正比，那么 $f(t)$ 就满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = kf(t)(\text{其中 } k \text{ 是人口增长率}) \tag{6.23}$$

和

$$f(t_0) = f_0(\text{其中 } f_0 \text{ 是某“起始年”} t_0 \text{ 的人口数}) \tag{6.24}$$

这两个式子。

由（6.23）式可得

$$\frac{\mathrm{d}f}{f(t)} = k\mathrm{d}t$$

两边积分就得到

$$\ln f(t) = kt + C(\text{其中 } C \text{ 是积分常数}) \tag{6.25}$$

由（6.25）式就得到 $f(t)=e^{kt+C}=e^{C}e^{kt}$。由初始条件 $f(t_0)=f_0$ 可求得 $e^{C}=f_0e^{-kt_0}$。

最后，就得到马尔萨斯人口预测公式 $f(t)=f_0e^{-kt_0}e^{kt}$，也就是

$$f(t)=f_0e^{k(t-t_0)} \tag{6.26}$$

我们看到，在人口预测公式中，e又出现了。

现在，我们用（6.26）式来计算人口的增长。

假设人口增长率 $k=1.5\%\sim2\%$，现取2%，于是 $f(t)=f_0\cdot e^{0.02(t-1965)}$（亿）。假设人口增加到原来的两倍需要 T 年，就有 $2f_0=f_0e^{0.02T}$。容易由此式算得 $T\approx34.66$ 年。

2005年1月6日0点，中国人口刚好达到13亿。央视“新闻频道”还对出生在北京妇产医院的第13亿个“小公民”的出生进行了实况转播。世界人口 f_0 在这一天也达到60亿。现在问，550年后的2555年，全世界的人口有多少？

由 $f(2555)=60\cdot e^{0.02(2555-1965)}$ 可以算出，2005年之后550年的2555年，全世界的人口 $f(2555)$ 就会达到前面所说的364万亿！

由于地球的平均半径约为6400km，所以地球的表面积

$$S\approx4\cdot3.1416(6.4\cdot10^{6})^{2}\mathrm{m}^{2}\approx5.147\cdot10^{14}\mathrm{m}^{2}$$

这样，即使地球上包括海洋等水面和目前没有人居住的南极等恶劣环境在内的每一个角落都能站人，每个人平均也只有约 $5.147\cdot10^{14}/(3.64\cdot10^{14})\ \mathrm{m}^2$，即约 $1.41\mathrm{m}^2$！如果只按“陆占其三”（包括寒冷的南极）的地方才能站人，那每个人平均更是少到 $0.42\mathrm{m}^2$！

平均一个人只有不到 $0.5\mathrm{m}^2$ 的面积，可见人类控制人口数量（和提高人口质量），是多么重要！

当然，实际上预测人口的增长并不是这么简单，因为要受到生活条件、各种意外事故等因素的影响。这样，学者们就创立了人口的数学模型

$$f=\frac{c}{1+e^{-pct}(c-f_0)/f_0}$$

这里的 c，p 都是要由统计规律确定的实数，t 是年代间隔时间。

根据这个数学模型，并由中国 1949 年（5.49 亿）、1953 年（6.02 亿）、1957 年（6.57 亿）、1978 年（9.75 亿），得到 $c\approx1628$，$pc\approx0.035\,68$，这样，这个数学模型就成了计算中国人口的增长公式

$$f=\frac{1628}{1+e^{-0.035\,63t}\dfrac{(1628-f_0)}{f_0}}$$

根据这个公式，宁挺先生在 1985 年出版的《说 e》一书中，以 1978 年的 975 百万为 f_0，预测了 2000 年的中国人口 f，此时 $t=22$，所以有

$$f=\frac{1628}{1+e^{-0.035\,63\cdot22}\dfrac{(1628-975)}{975}}\text{亿}$$

$$\approx 1247\text{ 百万}\approx 12.5\text{ 亿}$$

本节（和本书）中的一些内容，就是参考《说 e》和王树禾先生的《数学演义》一书写成的。

对

$$f=\frac{\alpha f_0e^{\alpha t}}{\alpha-\beta f_0+\beta f_0e^{\alpha t}}$$

这个美国和法国预测人口的公式和

$$f = \frac{c}{1 + e^{-pct}\dfrac{(c - f_0)}{f_0}}$$

有进一步兴趣的读者，可以参看《数学演义》和《说 e》。

当然，生物增殖中的 e 不只是出现在计算人口增长的公式中，科学家们发现，描绘生物种群的增长、细胞的增殖、细菌的繁殖、生物植株的增高等随时间变化的函数关系中，都会出现 e。著名的洛吉斯提（Logistic）函数

$$y = \frac{n}{1 + ce^{-rx}}(\text{其中 } n，c，r \text{ 是常数})$$

就是描述它们的近似数学模型，所以这类函数称为洛吉斯提模型。

例如玉米的整个生长过程，有人就借助于洛吉斯提模型用

$$y = \frac{300}{1 + 393.06e^{-0.23x}}$$

来近似描绘。

洛吉斯提函数在生活、生产和科研中都有广泛应用。例如，预测生物发育、生长状况，对于了解它们是否健康成长有很大作用。又如，对预测各种疾病的传播时间和病例的关系、控制和预防疾病，都有很大帮助。

而理想化的细菌增殖模型，由下面的推导得到：

设培养皿内的细菌总数是 n_0 个，在每个瞬间的增殖率是该时刻 n_0 的 k 倍，并以 1 小时为单位，那么 1 小时末的细菌的数就是 kn_0，此时的细菌总数就是

$$n_0 + kn_0 = n_0(1 + k)$$

两个小时末的细菌总数就是

$$n_0(1 + k) + n_0k(1 + k) = n_0(1 + k)^2$$

$$\cdots$$

显然，t 个小时末的细菌总数就是

$$n_0(1+k)^t$$

当然，细菌并不等到某一个小时末才开始增殖，而是在一个更短的时刻（我们设为$\frac{1}{m}$小时）末就开始增殖。这样，根据同样的方法，就可以得到 t 个小时末的细菌总数

$$n_{mt} = n_0\left(1+\frac{k}{m}\right)^{mt}$$

当 $m\to\infty$时的极限就是

$$n(t) = \lim_{m\to\infty} n_0\left(1+\frac{k}{m}\right)^{mt}$$

设 $k/m=1/p$，则 $m=pk$；当 $m\to\infty$时，$p\to\infty$，所以

$$\begin{aligned} n(t) &= \lim_{m\to\infty} n_0\left(1+\frac{1}{p}\right)^{pkt} \\ &= n_0 \lim_{m\to\infty} n_0\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{kt} \\ &= n_0 e^{kt} \end{aligned}$$

$n(t) = n_0e^{kt}$ 就是计算细菌增殖的公式。

下面，我们用这个公式计算细菌总数 $n_0=1$ 个在 24 小时之后的数量。

由于细菌是成倍增长的，所以 $k=2$，这样 $n(24)=1\cdot e^{2\cdot 24}=e^{48}\approx 7\cdot 10^{20}$——一个有 21 位整数的“天文数字”。

当然，由于细菌也会死亡，而且也不是 $m\to\infty$，等等，所以实际数字比这要小，但它的增殖无疑是很快的，这可以解释为什么夏天有营养的食物会很快变质。

6.16 何时添加樟脑球——衣物防蛀中的 e

为了使收藏的衣物不被虫蛀，就要放置一些樟脑丸即卫生球。樟脑丸主要成分是白色晶体状的有机化合物萘，所以又名萘球，也因容易升华出特殊的臭味，又俗称臭球儿或臭蛋。我们就是靠升华出的气体萘，将虫子“杀无赦”而保护衣物的。

放卫生球也要讲数学。

设密度为 ρ 的萘球的半径 $R(0)=5\text{mm}$，升华一个月之后 $R(1)=2.5\text{mm}$，求升华完毕的时间 t。

显然，单位时间内萘球升华的多少与萘球的表面积 $4\pi R^2$ 成正比。这样就有

$$\rho\frac{4}{3}\pi\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}=-k4\pi R^2 \tag{6.27}$$

式中 $4\pi R^3/3$ 是萘球的体积，k 是比例常数。

(6.27) 式可变形为

$$\mathrm{d}R(t)=-\left(\frac{k}{\rho}\right)\mathrm{d}t$$

积分后得到

$$R(t)=\frac{-kt}{\rho}+C \tag{6.28}$$

把初始条件 $t=0$ 和 $R(0)=5$ 代入 (6.28) 式，解得 $C=5$。

把 $t=1$，$R(1)=2.5$ 和 $C=5$ 代入 (6.28) 式，就得到 $\frac{k}{\rho}=2.5$。于是 $R(t)$ 和 t 的函数关系是

$$R(t)=5-2.5t \tag{6.29}$$

萘球升华完的时候，$R(t)=0$，代入 (6.29) 式得到 $0=5-2.5t$。由此求得 $t=2$。也就是说，在开始放入萘球 2 个月

之后，它就升华完了。

由于我们不可能经常去翻衣柜看看萘球是否升华完了，所以做上面的“预算”，以便“心中有数”，做到及时添加萘球。

6.17 “家务事”中的数学——洗衣服时也有 e

在洗衣服的时候，要先用少量的水和洗涤剂浸泡，然后再用手或者洗衣机揉搓并挤“干”衣服中的水。

我们知道，挤“干”，是不彻底的：衣服里始终会有残留的污水——假设其中包含洗涤剂的污物有 m_0 克，残留的水有 w 千克。

现在的问题是，怎样合理用一定量的 A 千克水，尽量把衣服洗得最干净。下面是张景中先生在《从 $\sqrt{2}$ 谈起》一书中的解答。

我们把 A 千克水分成 n 次使用，每次用 a_1，a_2，…，a_n 千克。经过这 n 次洗涤之后，衣服上剩下的污物可以由下面的计算得出。

第一次，把含有 m_0 克污物和 w 千克水的衣服，放到 a_1 千克的水中揉搓以后，m_0 克污物就均匀分布在（$w+a_1$）千克的水中。洗涤并把水几挤“干”后，显然有

$$\frac{\text{衣服上尚存污物量 } m_1}{\text{原来残存污物量 } m_0}=\frac{\text{拧“干”后残存水量 } w}{w+a_1}$$

即

$$m_1=\frac{m_0 w}{w+a_1}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)}$$

用相同的方法可以得到

$$m_2 = \frac{m_1}{\left(1+\frac{a_2}{w}\right)} = \frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)}$$

显然，经过 n 次洗涤并挤“干”后，衣服上残留的污物量是

$$m_n = \frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)} \tag{6.30}$$

这个式子就是洗衣服的“数学模型”。

有了这个数学模型，就可以讨论下面两个问题了：

①对于固定的 n，如何选取 a_1，a_2，…，a_n，才能使 m_n 最小？

②当 n 增大的时候，m_n 的最小值是增大还是变小，或者按别的什么规律变化？

从（6.30）式可以看出，若要 m_n 最小，就要使得 $\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$ 最大，条件是前面的 $a_1+a_2+\cdots+a_n=A$。

由于 $\left(1+\frac{a_1}{w}\right)+\left(1+\frac{a_2}{w}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a_n}{w}\right)=n+\frac{A}{w}$，当 n 固定的时候，$n+\frac{A}{w}$ 也固定。

这样问题就转化为：已知 n 个正数 $\left(1+\frac{a_1}{w}\right)$，$\left(1+\frac{a_2}{w}\right)$，…，$\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$ 的和是定数 $S=n+\frac{A}{w}$，这 n 个数的乘积在什么时候最大？

利用 n 个正数的几何平均值不大于它们的算术平均值公式即柯西不等式

$$\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}\leqslant\frac{(c_1+c_2+\cdots+c_n)}{n}$$

就有

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)\leqslant\left[\left(\frac{n+\frac{A}{w}}{n}\right)\right]^n=\left(\frac{1+A}{nw}\right)^n$$

这个式子说明，只有当每次用水量相等的时候，才能使残留的污物量最少。这就解决了第一个问题。

那么，是否把同样为 A 的水，分成（$n+1$）份来洗效果更好呢?

此时对（$n+1$）个正数 c_1，c_2，…，c_{n+1}（这里 $c_1=c_2=\cdots=c_n=1+\frac{A}{nw}$，$c_{n+1}=1$），由柯西不等式得到

$$\left(\frac{1+A}{nw}\right)^n\cdot 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{A}{nw}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left[1+\frac{A}{(n+1)w}\right]^{n+1}$$

由此可见，把水分成（$n+1$）份来洗，要比分成 n 次洗要好，也就是说$\left\{S_n=\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n\right\}$是递增的。

那么 S_n 会不会无限增加——洗涤次数足够多，而使衣服上残留的污物无限少呢?

我们假设$\frac{A}{w}=1$，$\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n$ 就变成了$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。而我们知道，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$。

从这个结论可以得知，不可能无限增多洗涤次数来无限减少衣服上残留的污物。

6.18 科学和 e——难舍难分的“情人”

e 和科学相互眷恋的例子不胜枚举。

在 19 和 20 世纪之交，物理学家们在研究“黑体问题”的时候，就得出许多含 e 的物理公式。

例如 1893 年，德国物理学家维恩（Wilhelm Wien, 1864～1928）得出的“辐射能量维恩分布定律” $u = b\lambda^{-5} e^{-a/\lambda T}$。

又如 1900 年，德国物理学家普朗克得到的“普朗克辐射定律” $u = a\lambda^{-5}/(e^{b/\lambda T}-1)$（或 $u = hc^2\lambda^{-5}/(e^{hc/k_\lambda T}-1)$）。同年 10 月 19 日，他又在向德国物理学会的报告《维恩光谱方程的改进》中，得到 $U = h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$。

再如英国物理学家瑞利（John William Rayleigh，原名斯特利特 John William Strutt，1842～1919）得到的 $u = C_1\lambda^{-4}T e^{-C_2/\lambda T}$；1905 年，瑞利的同胞金斯（James Hopwood Jeans，1877～1946）把它完善后成为“瑞利-金斯定律”。

最后，在理想气体的熵函数公式

$$S = vC_v\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + vR\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0(\text{用 } T, V \text{ 作参量时}),$$

和

$$S = vC_v\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - vR\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S_0(\text{用 } T, p \text{ 作参量时})$$

中。

科学和 e，确实是一对永远眷恋的“情人”。

当然，我们还有另外一种比喻。

据说离开“天宫”的神通广大的孙悟空，一个筋斗翻了十

万八千里，但最终还是在如来佛的手掌中。如果把数学比做如来佛的话，那走出数学“王宫”的e这次就是翻出了如来佛手心的孙悟空——在自然科学的各个领域大显神通。

我们在4.3中说过，函数“如果是以指数形式或者对数形式出现的话，必定是、而且只能是以e为底的”。在这一章，就看到了这个“必定是、而且只能是”!

从自然界的复利律，到物理学中的冷却公式；从系船缆绳的拉力，到数学中的素数定理；从火箭飞天的计算，到生物学中的细菌繁殖；从地上古物年龄的测定，到气象学中高空气压的研究；从空气中摆锤的运动，到统计学中的布朗运动……的确无一不与e有关。

◎第七章

掀起你的盖头来——e的“质”“量”大白天下

黑夜给了我黑色的眼睛，
我要用它来寻找光明。

——顾城

7.1 数系发展——从自然数到超越数

古希腊毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，当然，他们心目中的数是指自然数。在引入零、负数和小数之后，自然数扩充为有理数。

无理数最早是由古希腊毕达哥拉斯学派中的希帕索斯(Hippasus of Metapontum，约公元前5世纪）发现的。他发现边长为1的正方形的对角线长（$\sqrt{2}$）不是有理数，即不能用任何两个整数的比表示，是无限不循环小数。当时叫做“没有比”或“不能表达”，后来叫做“不可通约量”。

由于毕达哥拉斯学派笃信“万物皆依赖于整数”的神学观点和哲学理念，怕这一发现和泄密对其造成毁灭性的打击，于

是将希帕索斯追杀后抛进大海，以惩罚他对上述发现的泄密。另一说是，将他逐出学派，并立了块墓碑，好像他已经死了。由此可见，虽然“无理数”中“无理”这一沿用至今的“进口货”名称欠妥，但将“无理”二字用在维护神权、害怕真理的这个学派上却正好合适。

但是，发现无理数的秘密最终还是流传开来。古希腊科学家、哲学家亚里士多德揭示了$\sqrt{2}$的无理性。据古希腊哲学家、数学家柏拉图（Platon，公元前 427～前 348 或 347）说，他的老师、古希腊数学家泰奥多勒斯（Theodorus of Cyrene，约公元前 5 世纪末）则提出了无理数的基本思想。



图 7-1　戴德金

在对无理数的研究中，德国数学家戴德金（Julins Wilhelm Richard Dedekind，1831～1916）（图 7-1）的工作值得一提。

1872 年，戴德金写了《连续性与无理数》一书，通过对著名的“戴德金分割”引入无理数，从而建立了实数体系，使实数体系成为完整的代数结构。这个结构的成功，使直线上的点与数轴上的数一一对应，从而彻底填平了算术和几何的“鸿沟”，不但使古希腊数学家们的“算术连续统”的设想终于在严格的意义下得以实现，而且给微积分奠定了稳固的基础，使分析数学步入新的发展阶段。

戴德金有一件有趣的逸事。在他辞世前 12 年，曾出版了

一本《数学家的历书》，书中说他死于1891年9月4日。

戴德金看过这本书后觉得很有趣，并给编辑去了封信，信中说：“这个历书说我死去的日期是9月4日。以后可能要重新公布我死亡的正确日期。我确实不是死在1891年。据我回忆，1891年9月4日我还很健壮。在那天我宴请尊敬的乔治·康托尔，席间我们曾愉快地讨论过《体系和理论》的有关话题。”他提到的乔治·康托尔（Georg Cantor，全名Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor，1845～1918）也是德国数学家。

当然，高斯、魏尔斯特拉斯、康托尔等，也对无理数做出过伟大贡献。

关于无理数的较新成果是，1981年联邦德国著名数学家马勒发现了马勒定理：设a为大于1的自然数，$f=0.(a^1)(a^2)(a^3)\cdots$，其中的$(a^k)$表示把$a^k$用十进制写出来（例如当$a=3$时，$f=0.392\ 781\cdots$），则一定是无理数。

另一个较新成果是，1993年赫格瓦里（N.Hegyvari）证明了0.235 711 131 719…（由全体质数2，3，5，7…组成）是无理数。

无理数的研究至今没有结束，例如要证明某些数是不是无理数还十分困难，例如证明欧拉常数c是不是无理数，至今还不可能。

有理数加上无理数成为实数，而实数和虚数统称复数。

戴德金之前的1794年，法国数学家勒让德在巴黎出版了《初等几何》一书。他在书中写道：“很有可能，数π不能包含在代数的无理数中，亦即它不能是其系数全部为有理数的有限项的代数方程的根”。他的这一猜测表明他已意识到π为超越

数；同时，这一猜测最终导致无理数的分类。

凡是能够满足某个整数系数代数方程的复数，叫做代数数；凡不是代数数的数，叫做超越数。欧拉在1744年认为，这种数超越了代数方法的效力，从而提出了超越数的概念，并给出上述定义。或者说，给定一个数 α，如果不能使任何整数系数的方程 $f(x)=0$ 是 α 的根，则称 α 为超越数。

欧拉还凭直觉提出以代数数为底，代数数的对数的超越性的定理。从这一定理可得出所有自然数 $N\neq10^K$（K 为整数）的常用对数都是超越数，但没有证明。

19世纪初，瑞士数学家鲁伊利尔（Simon Antuan Jan L'Huillier，1750～1840）初步证明了超越数的存在，并指出它的构造方法。

1840年，法国数学家刘维尔证明e不是二次代数数。1844年，他在巴黎宣读了论文《论既非代数无理数又不能化为代数无理数的广泛数类》，宣布了超越数的存在并实际构造出一批超越数。

例如复数 $Z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g^{-n!}$ 对 $g=2，3，\cdots$，都是超越数。

又如刘维尔数

$$t=\sum_{K=1}^{\infty}a_K/10^{K!}=0.a_1a_2000a_3000\,000\,000\,000\,000\,000\,a_400\cdots$$

（a_K 是1～9之间的任意整数）的著名的超越数。

1874年，康托尔利用反证法给出了刘维尔定理的新证明，而且超越数“大大多于代数数”——超越数在复数集合中占的“比重”几乎是100%，从而奠定了超越数理论的稳固基础。

超越数的研究至今没有结束，例如要证明某些数是不是超越数还十分困难，有的——例如证明欧拉常数 c 是不是超越

数，至今也还不可能。有关内容我们在“9.2”中还要谈到。

7.2 e的性质——从无理数到非二次代数数

e是π的“近亲”——它们都是无理数，也都是超越数。

但是，要证明e是无理数却比证明π是无理数容易得多——1744年，欧拉首先给出了证明。

欧拉给出了用无限连分数计算平方根的一般方法，并将自然对数的底展开成三种无限连分数，即

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1\cdots]$$

$$=2+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}\cdots$$

$$=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}\cdots$$

并初步证明了e和e^2也是无理数。

此外，欧拉还求得

$$\frac{(e+1)}{(e-1)}=2+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots$$

$$\frac{(e-1)}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots$$

下面，我们用三种本质相同、形式不同的方法来证明e是无理数。

第一种是夏道行先生在《π和e》中给出的一种e是无理数的初等证明方法。他的思路是，证明对于任意一对自然数p和q，都有$q/p\neq e$。

对于任意给定的p，我们取充分大的自然数n，使得$n\geqslant p$，利用

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots$$

就可以得到

$$en! = 2n! + n(n-1)\cdot\cdots 3 + n(n-1)\cdot\cdots 4 + \cdots + \frac{1+1}{(n+1)}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \qquad (7.1)$$

设 $a_n = 2n! + n(n-1)\cdot\cdots 3 + n(n-1)\cdot\cdots 4 + \cdots + 1$，容易看出

$$a_n \text{ 是自然数} \qquad (7.2)$$

又设 $b_n = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$

则

$$0 < b_n = \frac{1}{(n+1)}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{(n+2)}{(n+2)^2} < \frac{2}{(n+1)}$$

所以 $0<b_n<1$。这就说明

$$b_n \text{ 不是整数} \qquad (7.3)$$

又从（7.1）式可以得到

$$b_n = en! - a_n \qquad (7.4)$$

由（7.2）、（7.3）和（7.4）式可以看出，$en!$ 不可能是整数。

所以，若 $e = q/p$，则 $en! = n!\ \frac{q}{p} = 1\cdot 2\cdot\cdots\ (p-1)$

$(p+1)\cdot\cdots\cdot n\cdot q$，也就是 $en!$ 是一个整数，因此 $e=\frac{q}{p}$ 不可能成立，也就是 $\frac{q}{p}\neq e$。

既然 $\frac{q}{p}\neq e$ 成立，那么 e 就是无理数。

第二种方法记载在宁挺先生的《说 e》中。

由于 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$，所以设 $e=\frac{p}{q}$（其中 p，q 是既约的正整数），就能得到

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)&=e-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)\\&=\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots\\&=\Delta q\end{aligned}$$

将上式两边乘以 $q!$，就得到

$$p(q-1)!-\left(2q!+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}+\cdots+1\right)=q!\Delta q$$

这个式子的左边显然是整数。

再看这个式子的右边

$$\begin{aligned}q!\Delta q&=q!\left[\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\frac{1}{(q+3)!}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+2)(q+1)}+\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)}+\cdots\end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{(q+2)(q+1)}<\frac{1}{(q+1)^2}$$

$$\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)}<\frac{1}{(q+1)^3}$$

$$\cdots$$

将它们代入前面 $q!\Delta q$ 的表达式中，就得到

$$q!\Delta q < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots$$
$$= \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$$

因为 $q \geqslant 1$，所以 $q!\Delta q < 1$。这就是说，前面的 $p(q-1)! - (2q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + 1) = q!\Delta q$ 的右边是小数，于是出现了矛盾。这就证明了 e 是无理数。

第三种是张景中先生在《从 $\sqrt{2}$ 谈起》一书中给出的另一种初等证明方法。所根据的是

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} (\text{这里 } m, n \text{ 是自然数}) \qquad (7.5)$$

也可以用

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{n+1}$$

当 $m \to \infty$ 时取极限，由（7.5）式可以得到

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta}{n} \quad (0 < \theta \leqslant 1) \quad (7.6)$$

如果 e 是有理数，就可以假设 e$=m/n$（这里 m，n 是自然数），则（7.6）式两端乘以 $n!$，就变成

$$(n-1)! = \left(n!2 + n!\frac{1}{2!} + n!\frac{1}{3!} + \cdots + n!\frac{1}{n!} + n!\frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta}{n}\right)$$

这个式子左边是一个整数，而右边除了前面各项是整数以外，最后一项却不是整数，这就出现了矛盾。所以“如果 e 是有理数”的假设不成立。也就是说，e 是无理数。

在代数中，除了把实数分为有理数和无理数这两大类之外，还可以把实数分为代数数和超越数两大类。

设 u 是实数，如果存在整数 a_0，a_1，a_2，…，a_n（$a_n \neq 0$，$n>0$），使得 u 适合方程 $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots$，$a_{n-1} u^{n-1} + a_n u^n = 0$，则 u 是代数数。

u 能适合的整数系数代数方程可以不止一个，它们的次数最低的那个 n，就称为 u 的次数。

不是代数数的实数，叫做超越数。

当然，对于复数也可以完全类似地定义代数数和超越数的概念。

由于有理数 $u = p/q$（p 和 q 是整数，$p \neq 0$）适合方程 $px - q = 0$（1 是代数方程的最低次数），所以是有理数 p/q 的

一次代数数。反过来，一次代数数也是有理数。

在无理数中，也有许多满足二次、三次、……整数系数方程的数，例如$\sqrt{2}$满足 $x^2-2=0$，黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{2}$满足 $x^2-x-1=0$，所以它们都是二次代数数。

那么，e 是不是二次代数数呢？

把 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$和 $e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\cdots$代入 $a_0e^2+a_1e+a_2=0$ 即 $a_0e+a_2e^{-1}+a_1=0$ 之中，就得到

$$(a_0+a_1+a_2)+\frac{a_0-a_2}{1!}+\frac{a_0+a_2}{2!}+\frac{a_0-a_3}{3!}$$
$$+\cdots+\frac{a_0+(-1)^{n-1}a_2}{(n-1)!}+\cdots=0$$

用 S_n 和 R_n 分别表示上式左边的前 n 项和余项，并分别乘以 $(n-1)!$，就得到

$$S_n(n-1)!+R_n(n-1)!=0$$

而

$$\begin{aligned}S_n(n-1)!=&(a_0+a_1+a_2)(n-1)!+(a_0-a_2)(n-1)!\\&+(n-1)(n-2)\cdots3(a_0+a_2)+(n-1)(n-2)\cdots\\&4(a_0-a_2)+\cdots+[a_0+(-1)^{n-1}a_2]\end{aligned}$$

因为 a_0，a_1，a_2 和 n 都是整数，所以上式右边是整数，因而左边的 $S_n(n-1)!$ 也应当是整数。但是，因为

$$|a_0+(-1)^na_2|\leqslant|a_0|+|a_2|$$

这里用到绝对值不等式的性质$|u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots|\leqslant|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$，所以由

$$R_n(n-1)! = \frac{a_0+(-1)^n a_2}{n} + \frac{a_0+(-1)^{n+1}a_2}{n(n+1)} + \frac{a_0+(-1)^{n+2}a_2}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

就得到

$$\begin{aligned}|R_n(n-1)!| &\leqslant \frac{|a_0+(-1)^n a_2|}{n} + \frac{|a_0+(-1)^{n+1}a_2|}{n(n+1)} \\ &\quad + \frac{|a_0+(-1)^{n+2}a_2|}{n(n+1)(n+2)} + \cdots \\ &\leqslant \frac{|a_0|+|a_2|}{n} + \frac{|a_0|+|a_2|}{n(n+1)} \\ &\quad + \frac{|a_0|+|a_2|}{n(n+1)(n+2)} + \cdots \\ &= \frac{|a_0|+|a_2|}{n}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]\end{aligned}$$

因为 $n>0$，所以

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1!}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(0+1)(0+2)(0+3)} = \frac{1}{3!}$$

$$\cdots$$

故

$$\begin{aligned}|R_n(n-1)!| &\leqslant \frac{|a_0|+|a_2|}{n}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right] \\ &= \frac{e}{n}(|a_0|+|a_2|)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{3}{n}(|a_0| + |a_2|)$$

由于取$n>3(|a_0|+|a_2|)>0$，所以$|R_n(n-1)!|<1$。

因为绝对值小于 1 的整数只能是 0，所以有$|R_n(n-1)!|=0$，由此得$R_n(n-1)!|=0$。

再根据前述

$$R_n(n-1)! = \frac{a_0+(-1)^n a_2}{n} + \frac{a_0+(-1)^{n+1}a_2}{n(n+1)} + \frac{a_0+(-1)^{n+2}a_2}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

可得

$$R_n = \frac{a_0+(-1)^n a_2}{n!} + \frac{a_0+(-1)^{n+1}a_2}{(n+1)!} + \frac{a_0+(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots = 0$$

用 $n!$ 乘以这个式子并移项，就得到

$$-[a_0+(-1)^n a_2] = \frac{a_0+(-1)^{n+1}a_2}{n+1} + \frac{a_0+(-1)^{n+2}a_2}{(n+1)(n+2)} + \frac{a_0+(-1)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

将上式取绝对值并根据前述绝对值不等式的性质，可以得到不等式

$$|a_0+(-1)^n a_2| \leqslant \frac{|a_0+(-1)^{n+1}a_2|}{n+1} + \frac{|a_0+(-1)^{n+2}a_2|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|a_0+(-1)^{n+2}a_2|}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$\leqslant \frac{|a_0|+|a_2|}{n+1} + \frac{|a_0|+|a_2|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|a_0|+|a_2|}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$< \frac{|a_0| + |a_2|}{n+1}\left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{|a_0| + |a_2|}{n+1}(e-1)$$

$$< \frac{2}{n+1}(|a_0| + |a_2|)$$

由于取 $n > 3(|a_0| + |a_2|)$，且 n 取的值满足 a_0 和 $(-1)^n a^2$ 同号，即当 $a_0 a^2 > 0$ 时，取 n 为偶数；当 $a_0 a^2 < 0$ 时，取 n 为奇数，此时就有

$$|a_0 + (-1)^n a_2| = |a_0| + |a_2| > 0$$

所以

$$|a_0 + (-1)^n a_2| < \frac{2}{n+1}(|a_0| + |a_2|)$$

此式可变为

$$|a_0| + |a_2| < \frac{2}{n+1}(|a_0| + |a_2|)$$

这样就得到 $1 < \frac{2}{n+1}$。

但是 $n+1$ 最少是 2，所以 $\frac{2}{n+1} \leqslant 1$。由此可知 $1 < \frac{2}{n+1}$ 是不可能成立的。

那么，这个荒谬的结果是怎么得来的呢？是由前面说整数 a_0，a_1，a_2（$a_n \neq 0$）存在，使得 $a_0 e^2 + a_1 e + a_2 = 0$ 成立得来的。这就说明 e 不是二次代数数。

既然 e 不是二次代数数，那么 e 是不是二次以上的代数数呢？

因为不是代数数就是超越数，如果 e 不是代数数，那就应该是超越数。那么 e 到底是不是超越数呢？

这两个问题等待着数学家们解答。

7.3 e 的性质——从无理数到超越数

1844 年，刘维尔猜测 e 是超越数，但没有给出严格证明。当然，关于 e 是超越数，早在 1667 年由英国数学家詹姆斯·格雷戈里（James Gregory，1638～1675）就试图提出证明。

1873 年，因为腿脚不好，一生总是拄着拐杖的法国数学家埃尔米特用高超的技巧，初步证明了自然对数的底 e 是超越数。他主要依据的是埃尔米特－林德曼定理

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + A_3 e^{\alpha_3} + \cdots + A_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

其中 $A_n \neq 0$，α 是互不相等的代数数表达式；他还用了著名的 $e^{i\pi} + 1 = 0$。

这个定理由魏尔斯特拉斯于 1885 年在 Berliner Sitzungsberichte 中证明，德国数学家果尔丹（Pavl Albert Gordan，1837～1912）于 1893 年在 Mathematische Annalen vol.43 中将证明简化。而德国数学家韦伯（Heinrich Weber，1842～1913）在代数教科书中给出的“初等证明”，可以在《100 个著名初等数学问题》150～158 页中找到。

以下用反证法证明 e 是超越数。

假设 e 满足整数系数方程

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0$$

将它乘以 $\int_0^{\infty} e^{-X} f(X) \mathrm{d}x$，并采用公式

$$\int_0^{\infty} e^{-X} f(X) \mathrm{d}X = \int_0^{k} e^{-X} f(X) \mathrm{d}X + e^{-k} \int_0^{\infty} e^{-X} f(X + k) \mathrm{d}X$$

就得到恒等式

$$a_0\int_0^{\infty}e^{-X}f(X)dX + a_1e\left[\int_0^1 e^{-X}f(X)dX + e^{-1}\int_0^{\infty}e^{-X}f(X+1)dX\right]$$
$$+\cdots + a_2e^2\left[\int_0^2 e^{-X}f(X)dX + e^{-2}\int_0^{\infty}e^{-X}f(X+2)dX\right]+\cdots$$
$$+ a_ne^n\left[\int_0^n e^{-X}f(X)dX + e^{-n}\int_0^{\infty}e^{-X}f(X+n)dX\right]= 0$$

或

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\int_0^{\infty}e^{-X}f(X+i)dX + \sum_{j=1}^{n}a_ie^j\int_0^{j}e^{-X}f(X)dX = 0$$

(以下称“恒等式”)

现在要选择适当的 $f(X)$，使得“恒等式”的第一项是整数，第二项是真分数。这样“恒等式”就出现了矛盾——左边的整数和真分数之和不可能等于右边的0。如果能做到这一点，就证明了e是超越数。

设

$$f(X) = \frac{1}{(p-1)!}X^{p-1}(X-1)^p(X-2)^p\cdots(X-n)^p$$

(其中 p 是素数)

把它用升幂排列，就得到

$$f(X) = \frac{(-1)^n(n!)^p}{(p-1)!}X^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!}X^p + \cdots$$
$$+ \frac{b_2}{(p-1)!}X^{p+1} + \cdots(\text{其中 } b_n \text{ 是整数，这里 } n \geqslant 1)$$

根据公式 $\int_0^{\infty}e^{-X}X^k dX = k!$，就得到

$$a_0\int_0^{\infty}e^{-X}f(X)dX = \frac{a_0(-1)^n(n!)^p}{(p-1)!}\int_0^{\infty}e^{-X}X^{p-1}dX$$
$$+ \frac{a_0b_1}{(p-1)!}\int_0^{\infty}e^{-X}X^p dX + \cdots$$

$$= a_0(-1)^n(n!)^p + a_0b_1p + \cdots$$

另一方面，当 $i>0$ 时，

$$f(X+i) = \frac{1}{(p-1)!}(X+i)^{p-1}(X+i-1)^p\cdots$$
$$(X-1)^pX^p(X+1)^p\cdots(X-n+i)^p$$
$$= \frac{C_1}{(p-1)!}X^p + \frac{C_2}{(p-1)!}X^{p+1} + \cdots$$

（其中 C_k 是整数，这里 $k\geqslant 1$）

因此

$$a_i\int_0^\infty e^{-X}f(X+i)\mathrm{d}X = pA_i\text{（其中 } A_i \text{ 是一个整数）}$$

这样，“恒等式”的第一项就是

$$\sum_{i=0}^n a_i\int_0^\infty e^{-X}f(X+i)\mathrm{d}X = (-1)^n a_0(n!)^p + a_0b_1p + \cdots p\sum A_i$$

取 p 是大于 a_0 和 n 的素数，则上式左边是不能被 p 除尽的整数，当然它不可能是 0。

再看“恒等式”的第二项。因为 $0\leqslant X\leqslant j$，$1\leqslant j\leqslant n$，所以有

$$|f(X)| < \frac{n^{p-1}n^p\cdots n^p}{(p-1)!} = \frac{n^{p(n+1)-1}}{(p-1)!}$$

此外

$$e^{-X} < 1, e^X \leqslant e^n$$

所以

$$\left|\sum a_ie^j\int_0^j e^{-X}f(X)\mathrm{d}X\right| < \frac{e^n}{(p-1)!}\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$$
$$= \frac{Mk_n^{p-1}}{(p-1)!}$$

其中 $M_n = e^n n^n\ \{|a_1| + \cdots + |a_n|\}$，$k_n = n^{(n+1)}$不依赖于 p。

注意到$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$，所以

$$\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} < (p-1)!$$

因此

$$\frac{z^{p-1}}{(p-1)!} < \left(\frac{ez}{p-1}\right)^{p-1}$$

所以，当$p \to \infty$时

$$\frac{z^{p-1}}{(p-1)!} \to 0 \ (z \text{是正数})$$

也就是说，若取p充分大，则可以使得

$$\frac{{k_n}^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{M_n}$$

即

$$\frac{M_n {k_n}^{p-1}}{(p-1)!} < 1$$

这样就证明了e是超越数。

e是超越数的证明，除了以上梅向明先生在《数学通报》1980年第1期发表的这一种外，由商务印书馆在1930年出版的《数论尺规作图及周率》120～129页也有一种。这本书的作者是美国数学史家达维德·史密斯（David Eugene Smith，1860～1944）等三人，由中国近代学者郑太朴先生翻译，其中包括π是超越数的证明。

此外，在召公先生发表在《数学通报》1963年第8期上的《代数数和超越数》中也可看到不同的证明。

但遗憾的是，埃尔米特却没能证明 π 是超越数。

不过，e 的超越性的证明，给数学家们以极大的鼓舞。1882 年的《数学年鉴》上，德国数学家林德曼在连续函数的意义下，借助于 9 年前埃尔米特的方法，终于严格地证明了 e，π 和 π^2 是超越数。林德曼证明 π 超越性的论文有《关于鲁道夫数》和《关于数 π》两篇。埃尔米特知道以后非常高兴。π 是超越数的证明在《数论尺规作图及周率》120～129 页也有一种。

至此，7.3 中提到的两个问题得到圆满解答：e 不是代数数，而是超越数。

由此可见，e（和 π）这类超越数，是代数中的无理数里更“无理”的数——它们与其他无理数在性质上有更大的差异。

后来，这方面的研究发展成为数论中的一个分支——超越数论。

7.4 e 的定义和符号——是“贵人”也是“打工仔”

（1）首先，我们从数轴上来定义 e。

在 5.2 中，已经有 $F(t)=(1+1/t)^{t+1}$ 和 $f(t)=(1+1/t)^t$ 分别是递减和递增函数的内容。

还容易看出：$F(t)=(1+1/t)^t(1+1/t)\geqslant(1+1/t)^t=f(t)$（当 $t\to\infty$ 时，“$\geqslant$”取“$=$”）。

假设当时间为 t 的时候，距离数轴上的 0 点分别为 $f(t)=(1+1/t)^t$ 和 $F(t)=(1+1/t)^{t+1}$ 的动点 p 和 P，在 $t=1$ 的时候以某瞬时速度开始同时移动：点 p 由 $f(1)=2$ 开始向右

连续移动，点 P 由 $F\ (1)\ =4$ 开始向左连续移动。

我们来看它们如图 7-2 移动的情形。

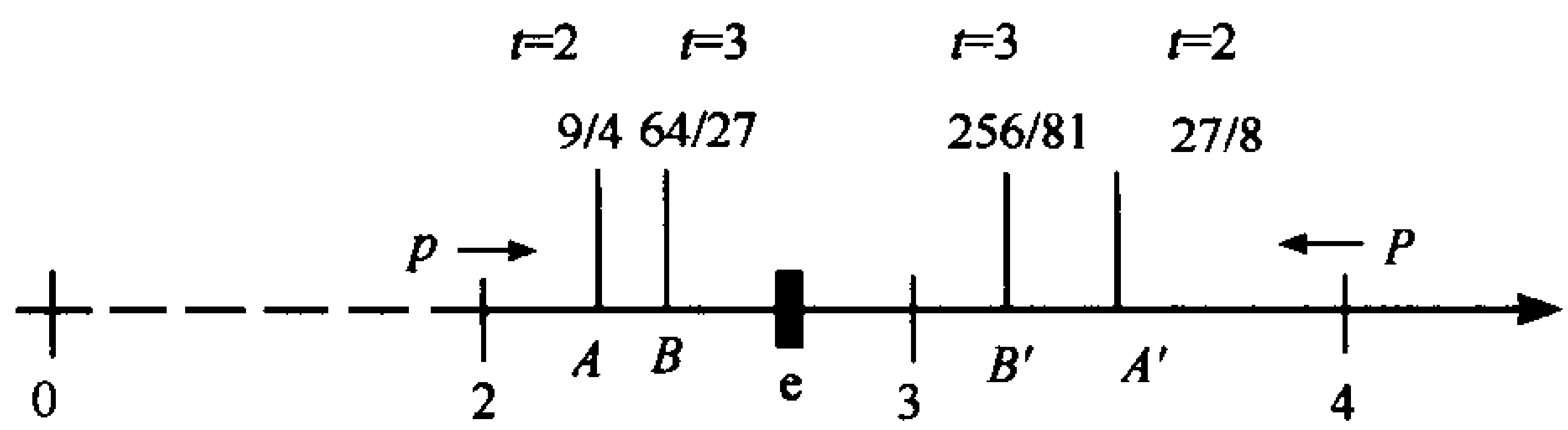


图 7-2

当 $t=2$ 的时候：$f(2)=9/4$， p 到达 A；$F(2)=27/8, P$ 到达 A'。

当 $t=3$ 的时候：$f(3)=64/27$， p 到达 B；$F(3)=256/81, P$ 到达 B'。

……

可以看出，p 和 P 在逐渐接近。

然而，在有限的 t 内，由于 $F(t)>f(t)$，即 P 总是在 p 的右侧移动，所以在有限的 t 内两个点不会相遇，但是两者之间的距离缩短了

$$d=F(t)-f(t)=\frac{f(t)}{t}$$

由于 $f(t)<4, d<4/t$ 就是一个随 t 的增大而无限变小的数，所以两个动点的最终距离将是无穷小。当然，这个结论也可以从前面当 $t\rightarrow\infty$ 时 $(1+1/t)^t(1+1/t)=(1+1/t)^t$ 看出来。

要表达这种情形，只有假定数轴上 2 和 4 之间存在着一个定点，动点 p 和 P 分别从左右两侧逼近，但在有限的时间内达不到这个定点。那么这个定点到 0 点的距离就是 e——当 $t\rightarrow\infty$ 时，$(1+1/t)^{t+1}$ 和 $(1+1/t)^t$ 共同的极限。

这就从数轴上定义了 e。

(2) e的第二种定义由级数收敛得出：如果级数 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$ 是收敛的，那么

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots \tag{7.7}$$

下面，我们来证明（7.7）式是收敛的。

显然，（7.7）式的前 n 项和 $S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$，容易看出

$$S_1<S_2<S_3<\cdots<S_n<\cdots \tag{7.8}$$

而且

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}=\frac{1}{2^{n-2}}$$

（中间一项有$(n-2)$个2）

$$\cdots$$

所以有

$$S_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}$$

用等比数列的求和公式，就得到 $S_n<3$。再结合（7.8）式可以看出，数列 S_1，S_2，…，S_n，……虽然逐渐增大，但始终小于3，所以（7.7）式是收敛的，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n<3$，就是 $e<3$。

由于 S_n 是e的“展开”，所以我们可以把上述定义中的证明看成是证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界的继5.2中四种方法之

后的第五种。

(3) e 的第三种定义由极限得到：当 n 为自然数的时候，$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

按照牛顿二项式定理，$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 可以展开为

$$1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

仿照这种方法，x_{n+1}可以展开为

$$2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

比较 x_n 和 x_{n+1}的右边的各项可以看到，除了第一项相等以外，x_n 的每一项都小于x_{n+1}的对应项，并且 x_{n+1}还多了最后一项，于是得到 $x_n<x_{n+1}$，即数列 x_n 是递增的。

此外，用较大的数 1 代替 x_n 的右边各项括号内的数，就得到

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

从这个式子可以看出，不论 n 取什么值，数列 x_n 总是小于定数 3，即有上界的。显然 x_n 的极限存在。现在用字母 e 来表示这个极限，就是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$。

那么，这个 e 是多少呢？数学家们求得

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$$

可以看出，这种定义中证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界——继第五种方法之后的第六种。

顺便指出，对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 的结论，不但在 n 是自然数的时候成立，而且当 $n(\neq 0)$ 是连续变量的时候也成立。下面来证明这一点。

由于 n 可以取 0 以外的任何实数值，因此如果能证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 都成立，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 就成立。

首先，假设 $n>0$，因为 n 可以是整数以外的值，所以一定有自然数存在，使得 $m\leqslant n\leqslant m+1$。显然 m 和 n 是同趋于 $+\infty$ 的。

由 $m\leqslant n\leqslant m+1$ 得到 $\dfrac{1}{m+1}\leqslant\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{m}$，即 $1+\dfrac{1}{m+1}\leqslant 1+\dfrac{1}{n}\leqslant 1+\dfrac{1}{m}$，于是

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

而

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{-1}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

容易看出

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\mathrm{e},\quad \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)=1,\quad \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=1$$

所以$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$和$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}$中的每一个，当$m\to\infty$的时候，都具有同一个极限e；根据极限存在的判定定理，介于它们之间的$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$也有同一个极限e。这样就得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$$

其次，假设$n<0$，并设$n=-t$ ($t>0$)，就得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{t}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{t}{t-1}\right)\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{t}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{t}{t-1}\right)\\&=\mathrm{e}\cdot 1\\&=\mathrm{e}\end{aligned}$$

这样就得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\mathrm{e}$$

至此，我们就证明了n取0以外的任何实数值的时候，

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限都等于 e。

从以上证明可以看出，n 是何种实数并不起主要作用，关键是$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 中的无穷小量$\frac{1}{n}$与绝对值无限增大的幂级数是两个变化情形彼此相反的量，这一点在研究 e 的时候显得十分重要。

(4) e 的第四种定义——几何定义

取如图 7-3 所示的等边双曲线 $xy=1$ 上，$B_0(1,1)$ 是它的顶点。在 B_0 的右边取点 B，作曲边梯形 B_0A_0AB。当它的面积随 B 向右移动变到无穷大（这一点我们将在 9.3 中谈到）的时候，B 的横坐标 x 就是无穷大，因此坐标 x 可以看成是曲边梯形 B_0A_0AB 的面积 S 的连续函数，即 $x=f(S)$。

再如图 7-4 作曲边梯形 $B_0A_0A_1B_1$ 和 $B_0A_0A_2B_2$，它们的面积分别是 S_1 和 S_2，那么 B_1 和 B_2 的横坐标就可表示为 $x_1=f(S_1)$和 $x_2=f(S_2)$。

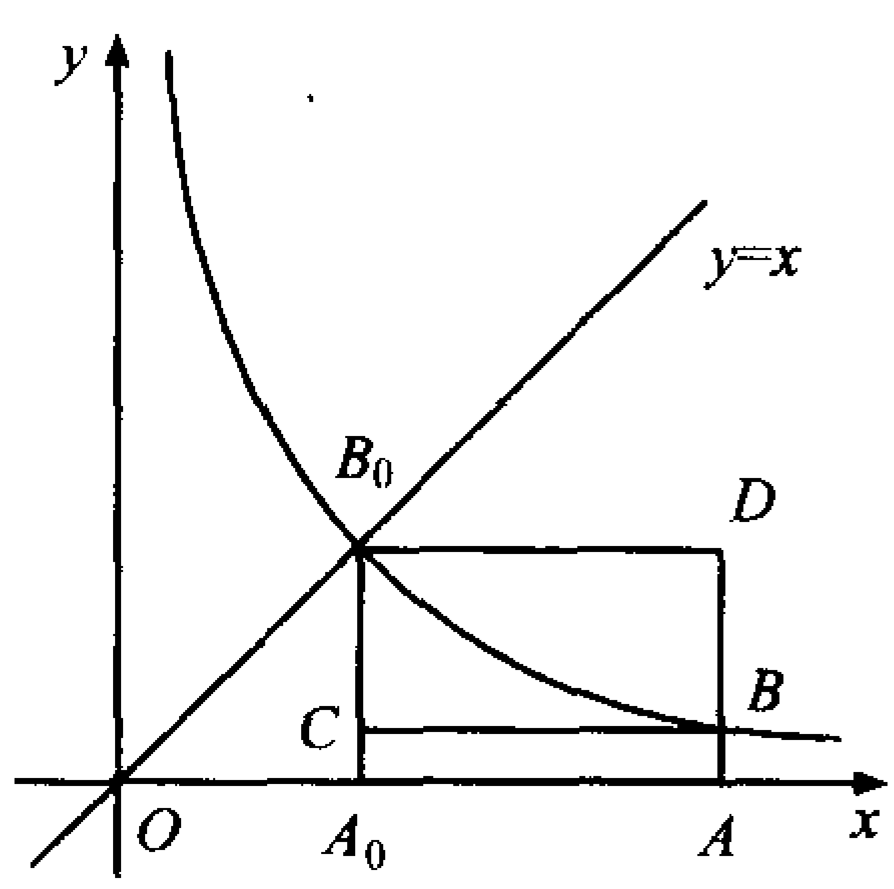


图 7-3

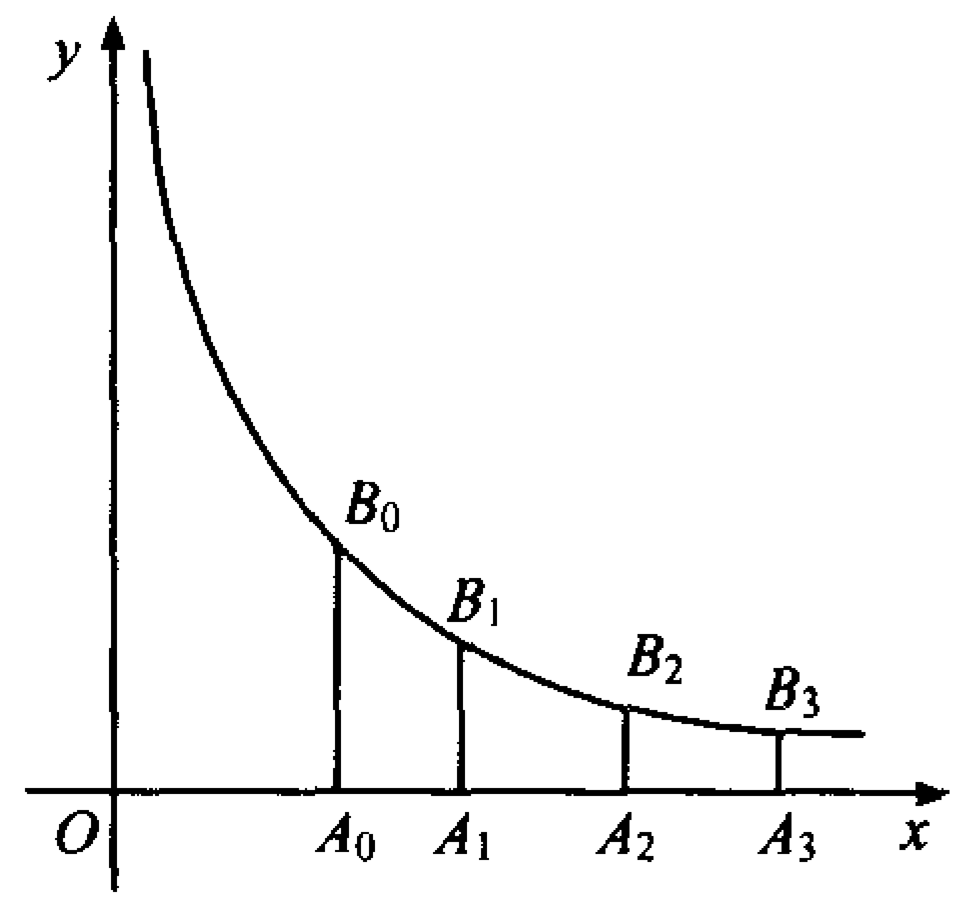


图 7-4

现在作一个"双曲旋转"（它的含义留在下面叙述）

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y/k \end{cases}$$

使 B_0 转到 B_1，可知在"双曲旋转"中旋转系数 $k=x_1$。设此

时 B_2 移到 B_3，于是曲边梯形 $B_0A_0A_2B_2$ 移到 $B_1A_1A_3B_3$。由于旋转后面积不变，所以这两个曲边梯形的面积相等。

再设曲边梯形 $B_0A_0A_3B_3$ 的面积为 S_3，就有 $S_3=S_1+S_2$，因此 $x_3=f(S_3)=f(S_1+S_2)$。另一方面，“双曲旋转”使 B_2 移到 B_3，因此横坐标 x_2 与 x_3 有 $x_3=kx_2$ 的关系，而 $k=x_1$，所以 $x_3=x_1x_2=f(S_1)f(S_2)$，于是得到函数方程 $f(S_1+S_2)=f(S_1)\cdot f(S_2)$。

函数方程最早出现在达朗贝尔、欧拉和拉格朗日等数学家的作品之中，而它的一般概念则是画法几何的创立者、著名的法国数学家蒙日（Gaspard Monge，1746～1818）在1773年提出来的。

由于函数方程的形式千变万化，又有很大的一般性，所以历经200多年，至今没有找到一般解法。

但是对于 $f(S_1+S_2)=f(S_1)\cdot f(S_2)$ 类型，挪威数学家阿贝尔在可微性要求的限制下，得到了 $x=f(S)=a^S$（这里 S 是任意选取的面积变量，$a=e^\lambda$，而 $\lambda=f'(S)/f(S)$）的结果。对图7-3中的矩形 CA_0AB 和 B_0A_0AD，由于 $A_0A=x-1$，$AB=1/x$ 和 $B_0A_0=1$，可知这两个矩形的面积分别是 $(x-1)/x$ 和 $x-1$。而曲边梯形 A_0B_0BA 的面积 S 介于它们之间，所以 $(x-1)/x<S<x-1$。

由 $(x-1)/x<S$，可以得到 $x(1-S)-1<0$。而当 $S<1$ 时，则有 $x<1/(1-S)$。

由 $S<x-1$ 即 $x>S+1$ 和 $x=f(S)=a^S$，$x<1/(1-S)$，可以得到 $1+S<a^S<1/(1-S)$。

显然，当 $S<1$ 时，如设 $S=1/n$，就有 $1+1/n<a^{1/n}<1/[1-(1/n)]$。此式就是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

而

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

由于当 $n\to\infty$ 的时候，$1+\frac{1}{n-1}\to 1$，所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

的左边和右边有共同的极限 e。

再根据极限存在的判定定理，就得到 $a=\mathrm{e}$，所以 $x=f(S)=a^S=\mathrm{e}^S$。

由于 $f(S)$ 是连续函数，所以当 $S\to 1$ 的时候，就有 $\mathrm{e}=f(1)$。又由于 $f(1)$ 是曲边梯形 A_0B_0BA 的面积为 1 时的横坐标，这就得到了 e 的几何定义：在等边双曲线 $xy=1$ 中，以 $x=1$ 为始边的曲边梯形，当它的面积为 1 时的点的横坐标为 e。

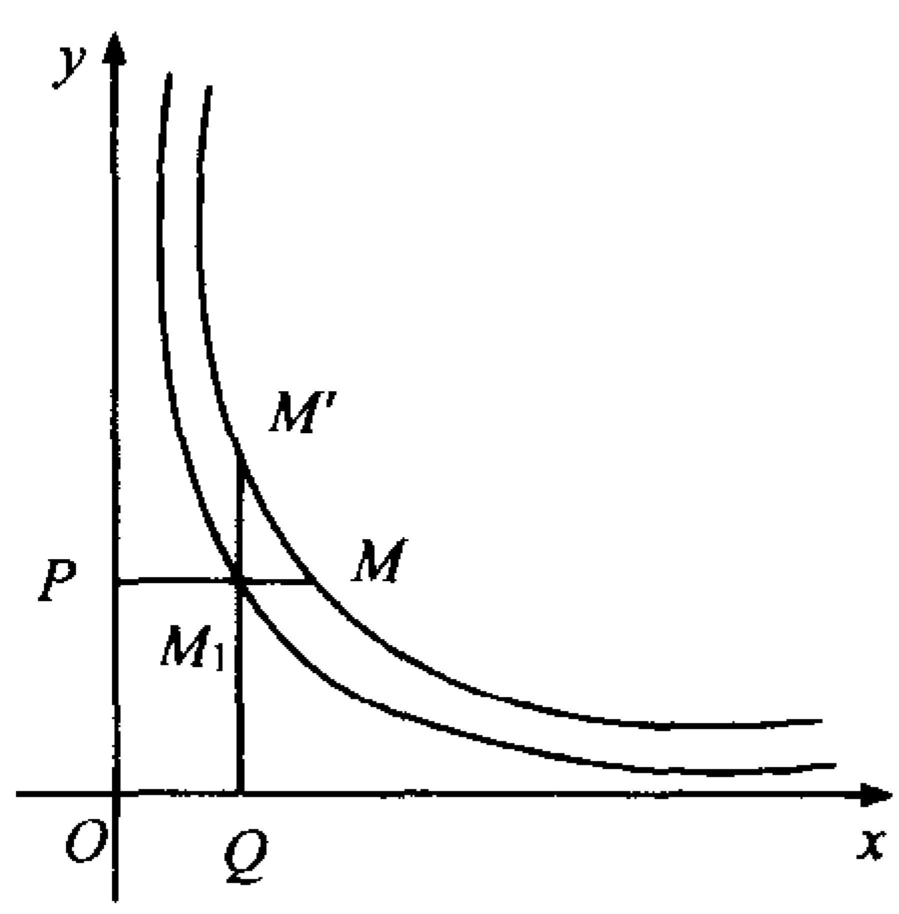


图 7-5

我们再回到前面提到的“双曲旋转”中来。

在图 7-5 中，等边双曲线 $xy=1$ 上的一点 M 首先变到 M_1，然后 M_1 又变到 M'。这个情形类似圆周旋转——双曲线好像在“转”。

因此，平面上的点变换 $x'=kx$，$y'=y$ 和 $x'=x$，$y'=y/k$

（k 是旋转系数或压缩系数）的合成

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y/k \end{cases}$$

就是一个“双曲旋转”。

说了 e 的定义，再来说 e 的符号。

1728 或 1727 年，欧拉在遗作（一份当时未发表的手稿）中，第一次引入 e 来作为自然对数的底。这份手稿在 1862 年才付印。正因为如此，后人为了纪念他，才用欧拉英文姓氏的第一个字母 E 的小写 e 来作为自然对数的底。至于欧拉用 e 正好和他的姓氏的第一个字母一样，是有意为之还是巧合，我们就不得而知了。也正因为如此，e 也叫做欧拉数。

此外，欧拉还在 1736 年出版的《力学》第一卷中，以及 1747～1751 年的文章中，都用 e 来表示自然对数的底。

接着，以下几位数学家也用 e 来表示自然对数的底：瑞士的丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli，1700～1782）在 1760 年，兰伯特在 1764 年，孔多塞在 1771 年，贝祖在 1797 年，克拉姆在 1808 年。

在 17 世纪对数传入中国以后，中国就有了几种专门表示 e 的符号。

例如，李善兰在 1859 年翻译的《代数学》卷首就有：“又訥（今简化为讷——引者）字代二、七一八二八一八，为訥白尔（即纳皮尔——引者）的对数率。”即用“訥”代表自然对数的底，不过他却误以为纳皮尔对数的底是 2.718 281 8。

又如 1873 年，华蘅芳翻译的《代数术》卷十八中就有：“则得其常数为二·七一八二八一八四五九〇四五不尽，此数以戊代之……可见戊即为訥对之底。”可以看出，他用“戊”表

示自然对数的底。显然，这与当时把 ABCDE 翻译成甲乙丙丁戊有关——e 译成了戊。

后来，中国的数学书用横排和西文方式，就采用了 e。

此外，“贵人” e 也当过“打工仔”。

首先只用一个字母来表示圆周率的，是德国巴伐利亚的奥尔多夫大学（University Aidorf）数学教授斯图姆［Johann Christoff（或 Christoph ）Sturm，1635～1703］，他在 1689 年用 e 来表示圆周率。

圆锥曲线中的椭圆、抛物线和双曲线等的离心率也用 e 表示——代表离心率的英文 eccentricity 的第一个字母。

在物理学中，电子的符号也用 e 表示。

当然，它们与自然对数的底毫无关系，只不过是 e 的“第二职业”。

7.5 计算 e 值——从欧拉到金田康正

要计算 e 值可不是一件容易的事。

1848 年，欧拉在《无穷分析引论》一书中研究了指数函数和对数函数，给出了著名的表达式

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

设其中 $x=1$，就得到

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

此时可能有人会说，用 $(1+1/n)^n$，把其中的 n 取得足够大就行了呗!

好，我们就来试试看。计算结果如表 7-1 所示。

表 7-1

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2.25
3	2.3074
4	2.4414
5	2.4885
10	2.5936
100	2.7051
1000	2.716 92
10 000	2.718 15

从表 7-1 可以看出，算到 $n=100$，1000，10 000 的时候，才分别有 1，2，4 位准确小数的结果（不考虑四舍五入）。而要得到 5 位准确小数，必须算到 $n=1\ 000\ 000$。

那么，要计算 $n=100$，1000，10 000 的时候，这个工作量怎样呢?

对于现代人来说，这不过是几十秒钟的问题，因为我们有电子计算器或电子计算机。但是对古人来说，就没有这些东西了——他们必须花费几天、几月、甚至几年，做成百上千甚至几万次的计算，才能把 e 值算到那么多的位数！更不用说算到 $n=1\ 000\ 000$ 了！

于是，人们必须“另找出路”。

新出路缘于牛顿。

1665 年，牛顿写成了包含指数级数（幂级数）、对数级数、二项级数、正弦级数、余弦级数、反正弦级数展开式方面的、不太严谨且过于复杂的论文。牛顿给出的幂级数展开式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

当然，这个式子也可以用泰勒展开式得到。

设这个式子中的 $x=1$，就得到我们熟悉的$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

现在，我们用它来计算，结果得到如表 7-2 所示的 e 的对应近似值。注意，单凭这些近似值不能确定能准确到 e 的多少位小数。但是把表 7-2 和表 7-1 对比，而且和 e 的准确值 2.718 281 … 比较，就可以看出用这种方法计算，比用 $(1+1/n)^n$ 直接计算能更快地得到准确 e 值。

表 7-2

n	$e=1+1/1!\ +1/2!\ +\cdots+1/n!$
1	2
2	2.5
3	2.666 666…
4	2.708 333…
5	2.716 666…
6	2.718 055…
7	2.718 253…

下面，我们来看表 7-2 中当 $n=7$ 的时候，如何来确定能准确到 e 的多少位小数。

对 $e=1+1/1!\ +1/2!\ +\cdots+1/n!\ +\cdots$而言，取它的 $(n+1)$ 项部分和作为近似值，那么引起的误差

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\cdots\right]$$

而

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)^2}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} < \frac{1}{(n+2)^3}$$

$$\cdots$$

所以

$$R_{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

现在取 $n+1=8$ 就有

$$R_8 < \frac{1}{8!} \cdot \frac{9}{8} \tag{7.9}$$

$$= 1/358\ 40 < 0.000\ 028\ 0$$

这时，计算 $n=7$ 时的和

$$S_8 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

就可以得到

$$2.718\ 253\ 7 < S_8 < 2.718\ 254\ 2 \tag{7.10}$$

因此，从（7.10）式和 $e>S_8$ 就得到

$$e > 2.718\ 253\ 7 \tag{7.11}$$

又从 $e=S_8+R_8$ 和（7.9）及（7.10）式，就可以得到

$$e < 2.718\ 282\ 2 \tag{7.12}$$

所以，从（7.11）和（7.12）式可得 $e=2.718\ 2\cdots$

当然，类似上面的计算也可简单叙述如下：

取 $e=1+1/1!\ +1/2!\ +\cdots+1/n!\ +\cdots$ 的前 n 项和作为 e 的近似值，则误差

$$R_n < \frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)!}$$

它的来源是

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\\ &= \frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)!}+\cdots\right]\\ &< \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)!}\end{aligned}$$

取 $n=8$，则 $R_8=1/(7\cdot 7!)<10^{-4}$，于是 $e\approx 1+1/1!+1/2!+\cdots+1/7!$ 这个值精确到小数点后第四位，即 e≈2.7183。

这就是说，表 7-2 中当 $n=7$ 时，就能得准确到小数点后 5 位的 e 值（末位误差不超过一个单位）。显然这比前面用 $(1+1/n)^n$，把其中的 n 取 1 000 000 才得到 5 位的 e 值容易得多。

如果取 $1+1/1!+1/2!+\cdots+1/n+\cdots$ 的前 11 项，即 $e=1+1/1!+1/2!+\cdots+1/10!$ 计算，就可以得到 2.718 281 801 2，此时的误差

$$R=\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{13!}+\cdots=\frac{1}{11!}\left[1+\frac{1}{12}+\frac{1}{(12\cdot 13+\cdots)}\right]$$

可以看出

$$R<\frac{1}{11!}\left(1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\cdots\right)=\frac{1}{11!}\cdot\frac{12}{11}<0.000\,000\,08$$

也就是说，此时已经得到 7 位小数的准确 e 值 2.718 281 8（末位误差不超过一个单位）。

这样，只要取足够多的项，就可以把 e 值计算到需要的位数了。据说欧拉当年就是用这种方法来计算 e 值的。

进一步，如果取更大的 n 值，就可以得到更准确的 e 值了。

书末附有 e 的 1000 位值，而它的 8 进位值是 2.557 605 213 050 535 5…。

为了记住多位 e 值，人们也像记住 π 值一样，编了一些背诵口诀。例如日本人用“当用汉字”编的谐音口诀是：鲋一钵二钵……

用 $e=1+1/1!\ +1/2!\ +1/3!\ +\cdots$，展开了一场计算 e 值的“马拉松”比赛。

20 世纪 40 年代，P. 彼德森（P. Pedersen）算出了 809 位 e 值。1947 年 9 月，英国数学家弗格森（D.F.Ferguson）和美国数学家雷恩奇即小伦奇（John William Wrench，1911～）各自算出 809 位准确 π 值，并于 1948 年 1 月联合发表了经他们共同校正的这个值。虽然他们计算的结果超过了 809 位，但却故意只发表了 809 位，为的是和彼德森的 809 位 e 值“平分秋色”。

电子计算机发明以后，计算 e 的值就变得容易了。

下面是在奈良女子大学西冈弘明先生协作下，日本学者堀场芳数使用富士通 M760-6 电脑，用公式 $e=1+1/1!\ +1/2!\ +1/3!+\cdots$ 和 FORTRAN77 算法语言，编制如下程序及得到的结果：

```
*     CONSTANT   E
      REAL*8 E, X
      E=0.0DO
```

```
      X=1.0D0
      DO 10 I=1, 100
      E=E+X
      X=X/DBLE (I)
10    CONTINUE
      WRITE (*, *) 'E', E
      STOP
      END
```

E=2.718 281 828 459 043 3

当然，这个结果中最后两位“33”是不准确的。

1996 年，日本数学家金田康正（Yasumasa Kanada, 1949～）则用电子计算机把 e 算到小数点后 515 396 位。

◎第八章

妙趣横生的数 e
——数学界的快乐天使

美的至高无上的部分，
无法以彩笔描绘出来。

——弗朗西斯·培根

8.1 数学家的“魔术”——有关 e 的几种表达式

在数学家的笔下，有关 e 的式子就像魔术师手中的魔术，有多种表达式。

第一种是 e 的连分数表达式。

有限连分数（式）通常有 5 种表示方法。例如，为了节约篇幅，可以把形如

$$b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cfrac{c_3}{b_3+\cdots+\cfrac{c_{m-1}}{b_{m-1}+\cfrac{c_m}{b_m}}}}} \text{ 或 } b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cdots+\cfrac{c_m}{b_m}}}$$

的分式，写成 $b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\frac{c_3}{b_3}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}}+\frac{c_m}{b_m}$，还可以简单写成 $b_0+\left[\frac{c_n}{b_n}\right]_{n=1}^{m}$；如果 $c_1=c_2=c_3=\cdots=c_m=1$(此时连分式称为简单连分式)，更可简写为$[b_0,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{m-1},b_m]$。

无限连分数（式）也有类似的 5 种式子。

e 的连分数有以下几种：

我们提到过的欧拉在证明 e 和 e^2 的过程中，把 e 展开成 3 种连分数，它们是

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1\cdots] \tag{8.1}$$

(8.1) 式就是

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}$$

$$e=2+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}\cdots \tag{8.2}$$

$$e=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}\cdots \tag{8.3}$$

第二种是我们知道的 e 的极限表达式 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，这个式子与 $e=\lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n}$ 等同。

第三种是我们知道的 e 的阶乘表达式 $e=1+1/1!+1/2!+\cdots+1/n!+\cdots$。

第四种是皮彭格尔（N.Pippenger）给出的一个和谐优美的表达式

$$e=2\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)^{1/4}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\right)^{1/8}\cdot\cdots$$

第五种是有关 e 的其他表达式。例如，欧拉还求得以下 3 个式子（其中前两个本质相同）：

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\cdots$$

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}$$

$$\frac{e-1}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\cdots$$

又如，$1/e=1-1/1!+1/2!-1/3!+1/4!-1/5!+\cdots+(-1)^{n-1}/(n-1)!+\cdots$。

最后，本书给出一种“简单分数表达式”：$e=3-1/4-1/31+1/1852-1/15\,667\,036\cdots$。

这里所说的简单分数，是指分子为 1、分母是自然数的只有一条分数线的分数。

那么，它是如何得来的呢？先看下面的式子：

	3	→ (2.71…/1)→3
3/1→	−2.718 281 828 459 045…	
	0.281 718 171 540 955…	→−1/3.54…→−4
−1/4→	−0.250 000 000 000 000…	
	0.031 718 171 540 955…	→−1/31.46…→−31
−1/31→	−0.032 258 064 516 129…	
	−0.000 539 892 975 174…	→+1/1852.21…→+1852
+1/1852→	+0.000 539 956 803 455…	
	0.000 000 063 828 281…	→−1/15 667 036.37…→−15 667 036
	…	

首先，用 2.71…/1 = 2.71…，并取和 2.71…最接近的整数 3（右栏第一行所示）。

显然，3 比 2.71…多出 0.28…（中栏第一、二、三行所示），就应该减去 0.28…即 1/3.54…，取和 3.54…最接近的整数 4（右栏第二行所示）。

接下来的过程类似。

当然，我们也可以从整数 2 开始，即 e = 2 + …，但此时你会发现，将得到 e = 2 + 1 + …，这就要重复上面的过程而得到相同的 e = 3 − 1/4 − 1/31 + 1/1852 − 1/15 667 036…。

8.2 “乘积最大”和“开方最大”——这里 e 也显神通

一个有趣的问题是：把一个正数 a 分成若干份，问怎么分才能使这些等份的乘积最大?

首先，我们知道，只有把 a 等分，才能使这些等份的乘积最大。这个结论，由柯西不等式

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

(式中等号当且仅当 $a_i = a_j(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 时成立）即可得出。

这样，剩下的问题就是如何把 a 等分？

把 a 分成 x 等份，只要求得 $y = a/x$(x 是正实数，不一定是自然数）的极大值就行了，而这显然就是要求得 $y = (a/x)^x$ 的极大值点。为此，我们用求导数找驻点求极值的方法。

把函数 $y = (a/x)^x$ 的两边取自然对数，就得到 $\ln y = \ln(a/x)$，求导数后得到

$$\begin{aligned} y'/y &= \ln(a/x) + [x\ln(a/x)]' \\ &= \ln(a/x) + x(x/a)(-a/x^2) \\ &= \ln(a/x) - 1 \end{aligned}$$

即

$$y' = y[\ln(a/x) - 1]$$

因为 $x > 0$ 时，$y = (a/x)^x > 0$，所以要使 $y' = 0$，就需要 $\ln(a/x) - 1 = 0$，解得 $x = a/\mathrm{e}$。

再由 $y' = y[\ln(a/x) - 1]$ 知道，当 $x < a/\mathrm{e}$ 时，则 $\mathrm{e} < a/x$，得 $y' > 0$；当 $x > a/\mathrm{e}$ 时，则 $\mathrm{e} > a/x$，得 $y' < 0$。

这样，就知道在区间 $(0, a/\mathrm{e}]$ 中，函数 $y = (a/x)^x$ 是增函数；而在区间 $[a/\mathrm{e}, \infty)$ 中，函数 $y = (a/x)^x$ 是减函数。此时由于 $x = a/\mathrm{e}$ 是唯一的驻点，所以当 $x = a/\mathrm{e}$ 时，$y = (a/x)^x$ 有唯一的极大值。也就是说，把 a 等分成 a/e 等份，这些等份的乘积最大。

但是，我们应该注意到，由于不能肯定 $x = a/\mathrm{e}$ 是一个整数，而“分成整数等份”是讲不通的，所以应把 $x = a/\mathrm{e}$ 取

与 a/e 最接近的整数——这一点可以由函数的单调性证明。

我们在这里把 a 分成两份来作为例证。等分时，每等份是 $a/2$，乘积是 $a^2/4$。不等分时，两份分别是（$a/2-m$）和（$a/2+m$）（这里 m 是一个正数）；乘积是（$a^2/4-m^2$）。可见 $a^2/4>$（$a^2/4-m^2$）。

前面证明的结论表明，例如要把 10 分成若干个等份，使各等份乘积最大，就应该用 10/2.718…来求得这“若干个”。不难算得 10/2.718…＝3.678…。

但是，因为把 10 分成“3.678…等份”，从“分成整数等份”的角度说，只能取 3.678…最接近的整数 4。这样就得到把 10 分成 4 等份，每等份为 10/4＝2.5 的结果。这样就得到 $2.5^4=39.0625$。

作为比较，如果分成 3 等份或 5 等份，就会分别得到 $(10/3)^3=37.03\cdots$ 和 $(10/5)^5=32$ 的结果。可以看出，30 和 32 都小于 39.0625。

用这种方法，读者不难得到 20，50 和 100 的分法：分别分成 7，18 和 37 等份。

当然，我们也可以不“分成整数等份”，那就有近似结果 $2.718^{3.679}\approx 39.6$，这个 39.6>39.0625 显然也是合理的。

另外一个有趣的问题是：如果 x 是正的变数，那么取什么值的时候，根式 $\sqrt[x]{x}$ 的值最大？

这个问题，是生于瑞士伯尔尼乌岑斯多夫、卒于德国柏林的数学家斯泰纳（Jakob Steiner，1796～1863）提出来的，出现在他的一本数学著作第 2 卷第 423 页上。

提起创立“射影几何基本定理”的斯泰纳，我们必须多说几句。他虽然没有像“四大数学家”那样划时代的伟大的数学

贡献，但他提出和解决的许多数学问题流传至今，让我们津津乐道。

斯泰纳用 5 种纯几何方法解决极大、极小问题，得出“等周问题”的解：在所有等周的平面图形中，圆的面积最大；它的逆定理也成立。要知道，用纯几何方法解决这个问题并非易事。

斯泰纳给出了新的、优美的彭赛列-斯泰纳定理的证明。这个定理说，所有用尺规作图法能作出的图，都可以用直尺和已知固定的圆作出来。这个问题也称为斯泰纳直尺问题，外国和中国数学家们对它的关注持续到今天。

至今已有 100 多种证明的“内角平分线相等的三角形是等腰三角形”这个命题——斯泰纳-莱姆斯（Lehmus）问题，吸引着古往今来的数学家和数学爱好者，曾被中国数学家吴文俊在研究几何定理的机器证明中引用。

斯泰纳终生未婚，将死后留下的约 90 000 法郎（约合 24 000美元）的遗产的 1/3，捐给了柏林学会，用来建立以他的名字命名的基金；750 法郎给了他出生地的母校，以奖励擅长心算的学生；其余的给了他的亲友。

现在，还是回到$\sqrt[x]{x}$何时最大的问题。

根据指数函数不等式 $e^{(x-e)/e}\geqslant 1+(x-e)/e$（式中仅当 $x=e$ 时用等号），可以得到 $e^{x/e}/e\geqslant x/e$，就是 $e^{x/e}\geqslant x$。

把 $e^{x/e}\geqslant x$ 两边开 x 次方，就得到$\sqrt[e]{e}\geqslant\sqrt[x]{x}$。这个式子用数学语言叙述就是：e 是 x 为正变数时，使得 $\sqrt[x]{x}$ 产生最大可能值的数。也就是说，在这种形式的数中$\sqrt[e]{e}$最大。

那么是多大呢？容易算出，$\sqrt[e]{e}\approx 1.445$。作为比较，$\sqrt[3]{3}\approx 1.442$，$\sqrt[2]{2}\approx 1.414$，可见它们都小于$\sqrt[e]{e}\approx 1.445$。

前面提到的$e^{(x-e)/e}\geqslant 1+(x-e)/e$ 的证明如下：

设 $X=1/x$，则 $(1+1/x)^x<e<(1+1/x)^{x+1}$ 变为 $(1+X)^{1/X}<e<(1+X)^{1/X+1}$，就得到 $(1+X)^{1/X}<e$。将两边同时 X 方，就有 $1+X<e^X$。显然 $e^{(x-e)/e}\geqslant 1+(x-e)/e$ 中的 $(x-e)/e$ 就是这里的 X。当 $x=e$ 时，$e^{(x-e)/e}\geqslant 1+(x-e)/e$ 取等号。

下面的事实更有趣：当 $\sqrt[x]{x}$ 中 $x=1$ 的时候，$\sqrt[1]{1}=1$。当 $x\to\infty$ 的时候，$\sqrt[\infty]{\infty}=1$；或者说 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$——用微积分方法可以证明。这个事实说明，当 x 取 1～∞的所有的"数"时，$\sqrt[x]{x}$ 呈现"波浪形"数值——$\sqrt[e]{e}$ 是"波峰"，而 $\sqrt[1]{1}$ 和 $\sqrt[\infty]{\infty}$ 是"波谷"。当然 1 还不是最低的"波谷"——最低的"波谷"是 0。我们不由得感叹，神秘的大自然为什么把数学安排得这么美丽动人！

为什么在"乘积最大"和"开方最大"这两个问题中，都是 e 而不是别的什么数"当大哥"呢？这是一个奇妙的谜。

下面，我们把难度降低一些。设 x 是自然数，问 x 取何值时 $\sqrt[x]{x}$ 最大？

显然，由前面的 $\sqrt[e]{e}$ 最大可知，一定是 x 最接近 e 时 $\sqrt[x]{x}$ 最大，所以 $x=3$。事实上 $\sqrt[3]{3}\approx 1.442>\sqrt[2]{2}\approx 1.414$，$\sqrt[3]{3}\approx 1.442>\sqrt[4]{4}\approx 1.414$。

8.3 e 不是 $\sqrt{2}$——"简单反证法"并非万能

2000 多年前，古希腊数学家欧几里得（图 8-1）在《几何原本》中用下面的简单反证法证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数。

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数。由于有理数可以写成 $\frac{m}{n}$ 的形式，所以

我们假设$\sqrt{2}=m/n$，这里 m 和 n 都是整数，而且它们没有公约数——是互素（互质）的。

这样由$\sqrt{2}=m/n$ 就可以得到 $m^2=2n^2$。由这个式子可以看出，m^2是偶数，故 m 也是偶数，因为只有偶数的平方才是偶数。

既然 m 是偶数，那它就可以写成 $m=2a$ 的形式，这里 a 也是整数。

再把 $m=2a$ 代入 $m^2=2n^2$，就得到 $n^2=2a^2$。



图 8-1　欧几里得

$n^2=2a^2$表明，n^2也是偶数，故 n 也是偶数。

由"m 是偶数"和"n 是偶数"可以看出，m 和 n 并不互质，这和前面所说它们互质相矛盾，故证明了$\sqrt{2}$不是有理数。既然不是有理数，就只能是无理数。

这样就完成了$\sqrt{2}$是无理数的证明。

不但如此，用同样的方法可以证明每个素数的平方根都是无理数。事实上，据古希腊哲学家、数学家柏拉图说，他的老师、古希腊数学家泰奥多勒斯就证明了 3～17 之间（除 4，9，16 外）各整数的算术平方根是无理数。

事实上，我们用与上面证明$\sqrt{2}$是无理数的简单的反证法，就可以证明自然数中"开方（不一定开平方，但要开整数次方）不尽者"通常都是无理数。

我们知道 e 是无理数，也就是说 e 是$\sqrt{2}$的"远亲"。这里说两者是"远亲"，即$\sqrt{2}$是无理数而不是超越数，而 e 既是无

理数，又是超越数。

那么，用简单的反证法是否可以简单证明$\sqrt{2}$的“远亲”e是无理数呢？

我们用上述简单的反证法来“按葫芦画瓢”吧。

假设e是有理数。由于有理数可以写成$\frac{m}{n}$的形式，所以我们假设$e=\frac{m}{n}$，这里m和n都是整数，而且它们没有公约数——是互素的。

这样，由$e=\frac{m}{n}$就得到$m^2=e^2n^2$。

观察$m^2=e^2n^2$这个式子，就不具备$m^2=2n^2$那种含有“2”的形式了，亦即证明再也进行不下去了。

由“用反证法能证明$\sqrt{2}$是无理数”，和“用简单反证法不能证明e是无理数”这两个事实来看，反证法——一种通用科学方法，并非万能。

所谓“通用科学方法”，就是指在自然科学、社会科学、人文科学各个领域都适用的方法。反证法是其中的一种，其他像大家熟悉的实验法、逆向思维法等都是通用科学方法。

但是，在各个领域都适用的通用科学方法，并不等于在这些领域的每个具体问题中都攻无不克、战无不胜。事实上，真正的“万能钥匙”是没有的。正如法国细菌学家查理·尼科尔(Charles Nicolle，1866～1936）所说：“没有一种方法是万能的。”

请注意，第一我们是说用反证法不能很简单地证明e是无理数，并没有说不能像7.3那样结合其他方法，用较复杂的过程来证明e是无理数。第二我们没有把话说绝，因为现在没有找到用反证法简单证明e是无理数的途径，并不等于一定没有——因为“科学是不能计划的”。

8.4 ln(- 1) = ? ——伯努利和莱布尼茨的争论

在 18 世纪，有三位著名的数学家和“ln(- 1) = ? ”结下了“不解之缘”。

瑞士数学家约翰·伯努利（1667～1748）认为，ln(- 1) = 0，是实数。他的理由如下：

由 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}(-x)}{-x}$，可以得到 $\ln x = \ln(-1)$。此时设 $x = 1$，就得到 $\ln(1) = \ln(-1) = 0$。

可是莱布尼茨却不同意这种说法，他说 ln（ - 1）是虚数。他也有如下理由：

因为 $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$，所以设其中 $x = -2$ 的时候，就得到

$$\ln(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \cdots$$

显然它是发散的。按照当时对虚数的理解，所以 ln（ - 1）是虚数。

最后欧拉解决了这个争论。他设著名的 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 中 $x = \pi + 2n\pi$，就得到

$$\ln(-1) = i(\pi + 2n\pi), \text{当 } n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

此时可以看到 ln（ - 1）是多值的。

8.5 “不考虑它们的收敛”——交错级数的悖论

我们在 5.9 中知道，快速计算调和级数要和 e 打交道，那么其他级数呢?

在这里，我们研究交错级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i$ 中的

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\cdots=? \quad (8.4)$$

答案不难找到：(8.4) 式等于 $\ln 2 \approx 0.693\,147\cdots$。

看，e 又“莫名其妙”地出现了！

但是，这个正确的答案 ln2，却来得不容易。

把 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\cdots=\ln 2$ 两边乘以 $\frac{1}{2}$，就得到

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+-\cdots=\frac{\ln 2}{2} \quad (8.5)$$

现在把 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\cdots=\ln 2$ 和 (8.5) 式两边分别相加，就得到

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+-\cdots=3\frac{\ln 2}{2} \quad (8.6)$$

可以看到 (8.6) 式的左边和 (8.4) 式的左边完全一样，只不过排列顺序不同而已。然而，(8.6) 式的值却是 (8.4) 式的值的 $\frac{3}{2}$ 倍。这样，我们就“证明”了 $3\frac{\ln 2}{2}=\ln 2$，即 $\frac{3}{2}=1$。

怎么又会是 $\frac{3}{2}=1$ 呢？显然这又是一个悖论——“无穷和悖论”。

对此，美籍德国数学家、教育家里查德·柯朗（Richard Courant，1888～1972）在他的微积分学论文中写道：“很容易想象出，这种明显的悖论的发现对 18 世纪的数学家带来什么

样的影响，他们习惯于运算无穷级数而不考虑它们的收敛。”

出现这种悖论现象的原因是：级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 之所以收敛，只是因为它的项有交错变化的正负号，因此可以部分地相互“补偿”。但是如果我们取这些项的绝对值的时候，将会得到发散的调和级数。

这是两类收敛级数之间的一个主要区别：收敛过程与各项的正负号无关的级数——绝对收敛级数，以及其收敛仅仅是因为各项的正负号交错变化的级数——条件收敛级数。

正是前一类级数代表了收敛的较强类型，因为在这里之所以发生收敛，是因为它的项自身可足够快地逼近零。

微积分学已经证明，如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i$ 满足条件 $a_n \geqslant a_{n+1}$ 和 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，那么这个级数收敛。这就是著名的莱布尼茨判别法。

只有在绝对收敛级数中，各项的任意重排才不影响它的和。这就是著名的狄利克雷定理。

我们在这里再一次体会到，对有限计算总是有效的普通算术规则，在牵涉到无穷大的时候，“一不小心”就可能失灵。难怪古希腊人会“害怕无穷大”（horror infinite），因为“无穷大是人类大脑无法领会的那个没有边际的维度”。

8.6 $e^{\pi\sqrt{163}}$ = 整数吗——加德纳的愚人节玩笑

三个无理数 e，π，$\sqrt{163}$——其中有两个超越数“能够”联合形成一个整数，这似乎太令人惊异了！

事实上，印度神奇的数学家拉马努金（图 8-2）就首先推



图 8-2　拉马努金

测，$e^{\pi\sqrt{163}}$是一个整数——他发现该数值为 262 537 412 640 768 743.999 999 …。由于后面几位都是 9，因而可能会是一个整数。

事实果真如此吗？半个世纪过去了，没有人能得出正确答案。

1972 年，人们用电子计算机计算，居然得到小数后直到 200 万位都是 9 的结果。但是，它要是一个整数，人们必须证明 9 应该“无限循环”。最后，美国亚利桑那大学的约翰·布里洛“证明了”这个数等于 262 537 412 640 768 744。他真的证明了吗？

事实上，这个数并不是一个整数，而是仅仅和 262 537 412 640 768 743 相差10^{-12}的数，而且用盖尔丰德-施奈德定理（见 9.2）可以证明，这个数是一个超越数。这个位数很多的近似值只是愚人节——每年 4 月 1 日的一种数学玩笑，刊在 1975 年 4 月出版的《科学美国人》上。它的作者就是大名鼎鼎的《科学美国人》的“数学游戏”专栏编辑——美国数学家、科普作家马丁·加德纳（Martin Gardner，1914～ ）。

8.7 “千条江河归大海”——$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}+\cdots)^x=e$

对于$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，我们已经非常熟悉。但是它收敛得很慢。那么有没有类似形式的、收敛得较快的式子呢？

有的。

$$F(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=e \qquad (8.7)$$

$$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}, k\text{ 是自然数}\right)$$

就是这类式子中的一个。由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$ 可知，$0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$。

下面，我们分两步来证明（8.7）式：

第一步，设 $x=n$ 是自然数。

根据二项式定理，有

$$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^k=1+\frac{1}{n}+\frac{k(k-1)}{2}\cdot\frac{1}{k^2n^2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\cdot\frac{1}{k^3n^3}+\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{k^kn^k}$$

$$=1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)\cdot\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot\frac{1}{n^3}+R$$

（R 代表从 $\frac{1}{n^3}$ 这项以后各项之和）。

因为

$$1+\frac{1}{n}\leqslant1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\leqslant1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\leqslant\left(1+\frac{1}{kn}\right)^k$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)^n\leqslant\left[1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\right]^n\leqslant\left[\left(1+\frac{1}{kn}\right)^k\right]^n$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e,\quad\left[\left(1+\frac{1}{kn}\right)^k\right]^n\to e$$

所以当 $n\to\infty$ 时

$$\left[1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\right]^n\to \mathrm{e}$$

这就证明了（8.7）式。

第二步，设 x 是任意实数。

（1）设 $x>0$。

取 $n=[x]$，则有 $n\leqslant x<n+1$。

由不等式的性质，可得到

$$\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{x}>\frac{1}{x+1}$$

从而得到

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n} \tag{8.8}$$

还可得到

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$$

从而得到

$$\frac{\theta}{(n+1)^2}<\frac{\theta}{x^2}\leqslant\frac{\theta}{n^2} \tag{8.9}$$

由（8.8）+（8.9）式可得

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{\theta}{(n+1)^2}<1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}$$

又由指数函数的性质，可得

$$\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{\theta}{(n+1)^2}\right]^n<(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2})^x\leqslant(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2})^{n+1}$$

此式即

$$\frac{\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{\theta}{(n+1)^2}\right]^{n+1}}{\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{\theta}{(n+1)^2}\right]}<\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right) \tag{8.10}$$

当 $x\to\infty$时，$n\to\infty$，因而（8.10）式中的

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)^n\to \mathrm{e}$$

$$\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{\theta}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\to \mathrm{e}$$

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\to 1$$

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{\theta}{(n+1)^2}\to 1$$

所以，根据极限运算的定理可得：不等式的左边和右边有同一个极限 e，因此根据极限存在判定法的两边夹法则可知，当 x 是正实数时

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$$

（2）设 $x<0$，则 $x=-|x|$，于是

$$F(x)=\left(1-\frac{1}{|x|}+\frac{\theta}{|x|^2}\right)^{-|x|}$$

当 $|x|>1$ 时，有

$$\frac{1}{|x|}<1+\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$$

即

$$1+\frac{1}{|x|}<2+\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$$

或

$$1+\frac{1}{|x|}-\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)<2$$

也就是

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{|x|}\right)<2$$

因为

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}<\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$$

所以

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}<\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}$$

从而得到

$$\theta<\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}$$

此式可变形为

$$\theta(|x|+1)-|x|<0$$

或

$$|x|(\theta-1)+\theta<0$$

也就是

$$\frac{\theta-1}{|x|^2}+\frac{\theta}{|x|^3}<0$$

或

$$1+\frac{\theta-1}{|x|^2}+\frac{\theta}{|x|^3}<1$$

即

$$1-\frac{1}{|x|^2}+\frac{\theta}{|x|^2}+\frac{\theta}{|x|^3}<1$$

或

$$\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\left(1-\frac{1}{|x|}+\frac{\theta}{|x|^2}\right)<1$$

从而得到

$$1+\frac{1}{|x|}<\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\theta}{|x|^2}}$$

和

$$1+\frac{1}{|x|}<\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\theta}{|x|^2}}\leqslant\frac{1}{1-\dfrac{1}{|x|}}$$

再由指数函数的性质，可得

$$\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|}<\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{\theta}{|x|^2}\right)^{|x|}}\leqslant\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{|x|}\right)^{|x|}}$$

即

$$\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|}<\left(1-\frac{1}{|x|}+\frac{\theta}{|x|^2}\right)^{-|x|}\leqslant\left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|}$$

当 $x\to-\infty$ 时，$|x|\to+\infty$，从而有 $\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^{|x|}\to \mathrm{e}$ 和 $\left(1-\dfrac{1}{|x|}\right)^{-|x|}\to\mathrm{e}$。根据前述两边夹法则，就得到 $F(x)\to\mathrm{e}$，即

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

这样，就证明了（8.7）式。

现在，我们根据（8.7）式，可以得到以下结果：

(1) 当 (8.7) 式中的 $\theta=0$ 时，就变成 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$ 是 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的一个推广。

(2) $F(x)$ 在 $0<\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$（$k$ 是自然数）时，比 $\theta=0$ 时收敛更快。例如在 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 中，当 $n=100$ 时，$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\approx 2.7$。而在 $\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)^n$ 中，当 $n=7$ 时，取 $k=50$，可得 $\theta=0.49$，此时就有 $\left(1+\frac{1}{7}+\frac{0.49}{7^2}\right)^7\approx 2.7$。

(3) $F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$ 有许多用途。

①显然可用于较快速计算 e 值。

②求解某些极限问题。以下举两个实例：

例 1　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}\right)^{5x}$（此时 $\theta=1/3<1/2$）。

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)^x\right]^5$$
$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)\right]^5$$
$$=\mathrm{e}^5$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^{x+99}$（此时 $\theta=0.25<1/2$）。

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^{x+99}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^{99}$$
$$=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

③对 $F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$，还可以继续推广和应用。例如，当 $x=n$ 是自然数时，用类似前面的证明过程，显然可以得到一系列结果：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}+\frac{\phi}{x^3}\right)^x=\mathrm{e}$$

$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},0\leqslant\phi\leqslant\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right),k\text{ 是自然数}\right)$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}+\frac{\phi}{x^3}+\frac{\beta}{x^4}\right)^x$$

$=\mathrm{e}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},0\leqslant\phi\leqslant\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right),0\leqslant\beta\leqslant\cdots,\right.$ k 是自然数)，

……

如果把这一系列式子中的 θ，ϕ，β，……分别用 θ_1，θ_2，θ_3，……代替，就有通式

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta_1}{x^2}+\frac{\theta_2}{x^3}+\frac{\theta_3}{x^4}+\cdots+\frac{\theta_n}{x^{n+1}}\right)^x=\mathrm{e}$ （θ_i 是实数，$i=1,2,\cdots,n$）

更一般地，若取

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x^k}(n\text{ 是自然数},a_1,a_2,\cdots a_n,\text{是任意个实数})$$

就有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)^x=\mathrm{e}^{a_1}$$

读者应能看出前面一系列式子中的 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$，$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6k}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{k}\right)$，……就是前面用二项式定理展开时的那些“系数”。

这就是“千条江河归大海”——“大海”就是这一系列结果的“通式”

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}+\frac{\phi}{x^3}+\frac{\beta}{x^4}+\cdots+\frac{\lambda}{x^n}\right)^x=\mathrm{e}$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta_1}{x^2}+\frac{\theta_2}{x^3}+\frac{\theta_3}{x^4}+\cdots+\frac{\theta_n}{x^{n+1}}\right)^x=\mathrm{e}$$

8.8 大显神通靠“自然”——巧用欧拉公式解题

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 容易得到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x$$

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad (8.11)$$

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \qquad (8.12)$$

$$\tan x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}$$

$$\cot x=\frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}$$

当然，我们已经知道其中的（8.11）和（8.12）式也叫欧拉公式。

这 5 个式子都可以用来巧妙地解题。下面我们仅用（8.11）式和熟知的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$ 来解一个题做示例。这个题是：求 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$的值。

解：

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$$
$$=\frac{e^{i\pi/7}+e^{-i\pi/7}+e^{3i\pi/7}+e^{-3i\pi/7}+e^{5i\pi/7}+e^{-5i\pi/7}}{2}$$
$$=\frac{e^{-5i\pi/7}(1-e^{12i\pi/7})}{2(1-e^{2i\pi/7})}\text{(用到等差数列求和公式)}$$
$$=\frac{1-e^{12i\pi/7}}{2(e^{5i\pi/7}-e^{i\pi})}\text{(用到 } e^{i\pi}=-1\text{)}$$
$$=\frac{1-e^{i\pi}e^{5i\pi/7}}{2(e^{5i\pi/7}+1)}\text{(用到 } e^{i\pi}=-1\text{)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

现在，我们再次证明在上面解题中大显神通的欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{ix}}\right)^{n/ix}\right]^{ix}=e^{ix}\quad(8.13)$$

由于复数 $1+\frac{ix}{n}$ 的三角函数式的幅角 $\theta=\arctan\frac{x}{n}$，所以

$$1+\frac{ix}{n}=\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(8.14)$$

又根据棣莫弗公式

$$\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n=\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

将（8.14）式两边取极限并结合（8.13）式，就有

$$e^{ix}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n/2}\cdot\lim_{n\to\infty}(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad(8.15)$$

以下分别求得（8.15）式中的两个极限：

设 $x^2/n^2=r$，得到 $n=|x|/\sqrt{r}$，当 $n\to\infty$时，$r\to 0$，由此得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n/2}=\lim_{r\to 0}(1+r)^{|x|/(2\sqrt{r})}$$

$$=\lim_{r\to 0}[(1+r)^{1/r}]^{\sqrt{r}|x|/2}$$

$$=e^0=1 \tag{8.16}$$

再设$\frac{x}{n}=y$，就得到 $n=\frac{x}{y}$且$\theta=\arctan\frac{x}{n}=\arctan y$，当 $n\to\infty$时，$y\to 0$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}(n\theta)=\lim_{y\to 0}\left(x\cdot\frac{\arctan y}{y}\right)=x\cdot 1=x \tag{8.17}$$

把（8.16）和（8.17）式代入（8.15）式，就得到欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

8.9 “极限点”与数学竞赛——e在几何中现身

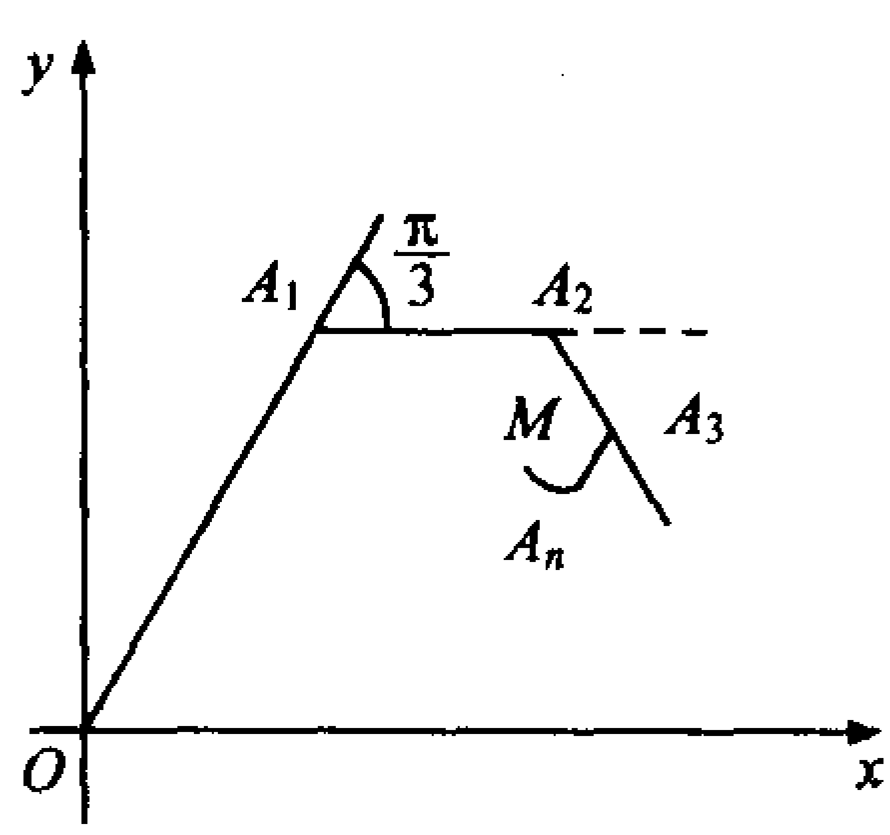


图8-3

有这样一道数学竞赛题：如图8-3，平面上一点A_1的坐标是（1/2，$\sqrt{3}/2$），动点 M 从原点 O 出发，沿 OA_1（OA_1与 x 轴的夹角是 60°）方向前进，到达 A_1后，按顺时针方向转 60°，前进距离为$|OA_1|$的一半，而到达 A_2点。然后再按顺时针方向转 60°，前进距离为$|A_1A_2|$的一半，而到达 A_3点……如此无限继续下去。试确定动点 M 的极限位置。

把直角坐标平面看成复平面，并设各点 O，A_1，A_2，⋯ A_n，对应的复数依次为 z_0，z_1，z_2，⋯z_n。

由于 $|A_nA_{n+1}| = |A_{n-1}A_n|/2$，且 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 为 $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$ 顺时针转动 $\pi/3$ 角的位置，所以有

$$z_{n+1} - z_n = \frac{(z_n - z_{n-1})e^{-i\pi/3}}{2} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

设 $q = \frac{e^{-i\pi/3}}{2}$，就有 $z_{n+1} - z_n = q(z_n - z_{n-1})$，于是

$$z_1 - z_0 = z_1 - z_0$$

$$z_2 - z_1 = q(z_1 - z_0)$$

$$z_3 - z_2 = q(z_2 - z_1) = q^2(z_1 - z_0)$$

$$\cdots$$

$$z_n - z_{n-1} = q(z_{n-1} - z_{n-2}) = q^{-n-1}(z_1 - z_0)$$

把以上各式相加，就得到 $z_n - z_0 = (z_1 - z_0)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{-n-1})$。

由于 $\angle A_1OX = \pi/3$，$|OA_1| = 1$，所以 $z_1 = e^{\pi/3}$。又知道 $|q| = |e^{-i\pi/3}/2| = 1/2 < 1$，应用等比数列求和公式，就得到 M 点对应的复数

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{z_1}{1-q} = \frac{e^{i\pi/3}}{1 - \frac{e^{-i\pi/3}}{2}}$$

因为

$$\left(1 - \frac{e^{-i\pi/3}}{2}\right)\overline{\left(1 - \frac{e^{-i\pi/3}}{2}\right)} = \left(1 - \frac{e^{-i\pi/3}}{2}\right)\left(1 - \frac{e^{i\pi/3}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$e^{i\pi/3}\overline{\left(1 - \frac{e^{-i\pi/3}}{2}\right)} = e^{i\pi/3}\left(1 - \frac{e^{i\pi/3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

所以 $z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}/3$ 就是所求的 M 的极限位置。

8.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$——"标准形式"走遍天下

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 是这个著名极限的"标准形式"，它和它的另一个"标准形式" $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$ "走遍天下都不怕"——许多数学问题都可以用它解决。

例如，在 7.4，8.7 和 8.8 等处，我们都可以找到它解决数学问题的踪影。

下面，我们再举出几个著名的例子：

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\tan x}$。

设 $\cos x=1/y$，得到 $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-1/y^2}$ 和 $\tan x=\sqrt{1-1/y^2}/(1/y)$，就有

$$\lim_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\left[(1+\cos x)^{1/\cos x}\right]^{\sin x}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left[(1+1/y)^y\right]^{\sqrt{1-1/y^2}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$$

从这个例子可以看出，选择适当的置换变量($\cos x=1/y$)，把待求极限的式子中各变量用置换变量表示出来[$\tan x=\sqrt{1-1/y^2}/(1/y)$]，再把待求极限的式子变为"标准形式"的表达式($[(1+1/y)^y]^{\sqrt{1-1/y}}$)，最后求出待求的极限是解这类问题的"五步曲"。在求极限的过程中，有时要用到极限的"四则运算法则"——例如乘积的极限等于极限的乘积。

以下再给出 5 个例子供读者参考：

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x^2)\right]^{x^2\cot^2 x/x^2}=\lim\limits_{x\to0}[(1+$

$x^2)^{1/x^2}]^{\cos^2 x(x/\sin x)^2}=\mathrm{e}$。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\mathrm{e}=1$。

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log_a a^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\log_a[1+(a^x-1)]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\log_a[1+(a^x-1)]^{1/(a^x-1)}}=\frac{1}{\log_a \mathrm{e}}=\ln\mathrm{e}$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+1}{n-1}\right)^{(n-1)/(x+1)}\right]^{n(n+1)/(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+1}{n-1}\right)^{(n-1)/(x+1)}\right]^{(x+1)/(1-1/n)}=\mathrm{e}^{x+1}$。

(6) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\{[1+(\tan x-1)]^{1/(\tan x-1)}\}^{(\tan x-1)\tan 2x}$

$=\lim\limits_{x\to\pi/4}\{[1+(\tan x-1)]^{1/(\tan x-1)}\}^{-2\tan x/(1+\tan x)}=\mathrm{e}^{-1}$。

上面呈现 1^∞型的题很有代表性和实用价值，因为用到了“极限运算定理”：当 $x\to a$（有限或无限）时，如果 $\varphi(x)\to 1$ 且 $\varphi(x)\neq 1$，而 $\psi(x)\to\infty$ 且 $\psi(x)[\varphi(x)-1]\to b$，就有 $[\varphi(x)]^{\psi(x)}\to \mathrm{e}^b$。

下面，我们先证明这个定理，再看如何用它来解第（6）题。

因为

$$[\varphi(x)]^{\psi(x)}=[1+\varphi(x)-1]^{\psi(x)}$$
$$=\{[1+(\varphi(x)-1)]^{1/[\psi(x)-1]}\}^{[\psi(x)-1]\psi(x)}$$

所以当 $x\to a$ 的时候，就有 $[\varphi(x)]^{\psi(x)}\to\mathrm{e}^b$。

在第（6）题中，$\varphi(x)\to 1$ 是 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\tan x\to 1$，$\psi(x)\to\infty$ 是 $\lim\limits_{x\to\pi/4}1/(\tan x-1)\to\infty$，显然这里呈现了 1^∞的形式而 $b=-1$，所以 $[\varphi(x)]^{\psi(x)}\to\mathrm{e}^b=\mathrm{e}^{-1}$。这里为什么 $b=-1$ 呢？因为第（6）题中的 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\to -1$，而$\frac{-2\tan x}{1+\tan x}$是利用正切的倍角

公式 $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 由第（6）题中的（$\tan x - 1$）$\tan 2x$ 变换而来的。

利用“五步曲”、极限的“四则运算法则”和“极限运算定理”，有兴趣的读者可试做以下题目，体验 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$“走遍数学天下”的味道：

① $\lim\limits_{n\to 0}[\ln(x+n)+\ln(x-n)-2\ln x]/n^2$；

② $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\quad(x>0)$；

③ $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{a^x-a^n}{x-n}\quad(x>0)$；

④ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\quad(x>0)$；

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$；

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+k\sin\dfrac{x}{n}\right)^n$；

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$；

⑧ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x x}{1+3^x x}\right)^{1/x^2}$。

它们的答案分别是：① $-1/x^2$；② $\ln x$；③ $a^n\ln a$；④ $a^{a^a}\ln a$；⑤ $\mathrm{e}^{-1/2}$；⑥ e^{kx}；⑦ $1/\sqrt{\mathrm{e}}$；⑧ $2/3$。

8.11 从 ω 与 e 的关系说起——万数回归“大自然”

这里的 $\omega=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ 是指三次方程原根。

1732 年，欧拉成功地用 ω 和 ω^2 解出了曾经由意大利数学家卡尔达诺（Girolamo Cardano，（或 Jerome Cardan，此时译为

卡尔丹），1501～1576）研究过的、形如 $x^3+mx=n$（m 和 n 都大于 0）的全部根的一般形式。

1770 年，拉格朗日为了研究方程，引入了“预解式”，其中同样利用了 ω。

……

属于方程代数解的 ω 主要用于方程的代数解的研究。

我们知道，ω 有许多有趣的性质。

例如，ω 和 ω^2 互为共轭复数，而且是 $x^2+x+1=0$ 的两个根。

又如，ω 是 1 的三次原根。换句话说，ω 是 1 的一个三次方根（即 $\omega^3=1$），同时 1 的其余两个三次方根，都可以由 ω 自乘得到（即 ω^2 和 $\omega^3=1$）。

再如，当 n 是整数的时候，ω 的乘幂有趣味的规律：$\omega^{3n}=1$，$\omega^{3n+1}=\omega$，$\omega^{3n+2}=\omega^2$。

还有一个例子是，1，ω，ω^2 在复平面内组成正三角形而且关于 X 轴对称，这个正三角形的外接圆是以原点为圆心，以 1 为半径的圆。

……

更有趣的是，ω 这个虚数要和“自然”结伴为友：$\omega=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$。在这里，$\omega$ 的确和 e——自然对数的底结伴为友了。

当然，不仅 ω 这个虚数可以和“自然”结伴为友，而且除 0 以外的所有复数，都可以和“自然”“结伴为友”。

果真如此吗？是的。

我们知道，除了 0 以外的任何复数 $a+b\mathrm{i}$ 都可以表示成形

如

$$r(\cos x+\mathrm{i}\sin x)(\text{式中 } r=\sqrt{a^2+b^2},\cos x=\frac{a}{r},\sin x=\frac{b}{r})$$

的、具有确定幅角的三角函数式；而根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$$

复数的三角函数式都可以化为以 e 为底的、和“自然”“结伴为友”的指数式。

例如

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$$

又如，$-1=-1+\mathrm{i}\cdot 0$ 这个虚部为 0 的复数，就可以化做 $\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$。我们熟知，它就是著名的 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 或 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=1$。

不过，能把诸如 $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$-1$，1 这些复数分别表示成 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$ 这些复数的指数式，倒是不值得大惊小怪的，因为复数都可以表示成指数式——也称为复数的极坐标式。

但是，我们注意到在像 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$ 这些比较特殊的复数的指数式中，都可以看到 e 和 π。也就是说，复数总是和两个最著名的超越数结伴同行，这不能不说是“数”（指复数）、“大自然”（指 e）和“圆”（指 π）之间最优美的联系的华章，也可以说，万数回归在圆球形的“大自然”之中。

◎第九章

何当痛饮黄龙府
——等你揭开 e 的谜团

自然界不会一下子披露她所有的秘密。

——塞涅卡

9.1 移植布劳威尔的难题——e 是正规数吗

荷兰数学家、近代直觉主义的创立者布劳威尔（Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881～1966），为了逻辑上和哲学上的目的，提出了一个困难的问题："在 π 的十进位展开式中，是否有 1000 个相继的数字全为 0?"如果 π 是正态数，那么 1000 个 0 的数字块绝不只出现一次，而是出现无限多次，且其出现的平均频率为 $1/10^{1000}$。

同样，我们也要提出类似的问题："在 e 的十进位展开式中，是否有 1000 个相继的数字全为 0?"如果 e 是正态数，那

么 1000 个 0 的数字块绝不只出现一次，而是出现无限多次，且其出现的平均频率为 $1/10^{1000}$。

回答布劳威尔和我们的问题决非探囊取物，而回答 π 和 e 是不是正态数的问题恐怕更会“难于上青天”。至今，这些问题仍然是悬案。

这正如美国数学史家霍华德·伊夫斯（Howard Eves）在他 1971 年出版的《重访数学界》一书中所说：“这当然不是电脑能解决的问题。……目前很多人认为电脑无所不能。这类问题的存在，或许能点醒他们。”不过，数学家们笃信 π，e，$\sqrt{2}$，欧拉常数 c 等，都是正态数，还用电子计算机把它们算出许多位。例如，美国哥伦比亚大学的达特卡（J.Dutka），在 1971 年花去 47.5 小时，算出$\sqrt{2}$的 1 000 082 位值，它被打印在 200 页的纸上。又如，法国女数学家玻叶（W.A.Bouyer）和华特曼（M.S.Waterman），在 1974 年把 c 算到小数点后 7000 多位。而金田康正则在 1996 年把 e 算到小数点后 515 396 位。

这种研究的价值之一在于，正态性能够成为科学计算的伪随机数发生器的基础。虽然这种研究至今仍长路漫漫，但人们相信，π 和 e 的研究会揭示出解决正规性问题的新方法。

9.2 “简单”的难题——π 和 e “家族”“无理”“超越”吗

我们知道，π 和 e 都是无理数。然而，我们至今仍不知道 $\pi+e$，$e\pi$，π/e，e^e，π^e是不是无理数或超越数。

可能有人会说，既然 π 和 e 都是无理数，那两个无理数相加（$\pi+e$），或者两个无理数相除（π/e）不就是无理数么！

不能这么说。我们只要分别看以下的反例就知道了。

我们知道$\sqrt{2}$和$(2-\sqrt{2})$都是无理数，但$\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$却不是无理数。

我们知道$\sqrt{2}$和$\sqrt{2}$都是无理数，但$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$却不是无理数。

事实上，几个无理数经过数学运算之后，可能是无理数，也可能不是无理数。

对几个超越数经过某些数学运算之后是不是超越数的问题，也可如上进行讨论。



图 9-1　希尔伯特

在探索几个无理数（或超越数）经过数学运算之后是不是无理数（或超越数）的问题上，数学家们真是绞尽脑汁，煞费苦心。

1900 年，在巴黎召开的第二次国际数学家大会上，希尔伯特（图 9-1）提出了著名的 23 个问题，其中第 7 个问题就是某些数的无理性和超越性问题：如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是无理代数数，那么 α^β是不是超越数？例如$2^{\sqrt{2}}$是不是超越数？

1929 年，苏联数学家盖尔丰德和德国数学家西格尔（Carl Ludwig Siegel，1896～1981）各自独立证明了：如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是二次复代数数，那么 α^β是超越数。而特例为 $e^\pi=(-1)^{-i}$即 $e^\pi=i^{-2i}$是超越数。

1930 年，苏联数学家库兹明（Родион Осиевич Куэъмин，1891～1949）把这个结果推广到 β 是二次实代数数的范围，

特例为 $2^{\sqrt{2}}$是超越数。

1934 年，盖尔丰德和德国数学家、西格尔的学生施奈德（Theodor Schneider，1911～）用不同方法分别对希尔伯特第 7 问题的后半部分做了肯定的证明，称为盖尔丰德-施奈德定理。

1955 年，英籍德国数学家罗斯（Klaus Friedrich Roth，1925～）发表了《对于代数数的有理逼近》，彻底解决了用有理数逼近无理数的问题，把创立了 30 多年的这一理论发展为罗斯定理或瑟厄-西格尔-罗斯定理。罗斯也因此和其他成就荣获 1958 年菲尔兹奖。这里提到的瑟厄，又译图埃，是 19～20 世纪的数学家，国籍不详。

我们在 7.1 中提到了刘维尔数。1953 年，英国数学家马赫勒（Kurt Mahler，1903～?）证明了 π 不是刘维尔数，即 π 不是刘维尔数类型的超越数，而是另一种类型的超越数。

一个无理数 β 是刘维尔数，如果对于任意一个 n，都存在整数 p 和 q，使得

$$0 < \left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

刘维尔指出，这些 β 都是超越数。事实上，当 q 充分大的时候

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{14.65}}$$

归功于出生在苏联的数学家达维德·丘德诺夫斯基（David V.Chudnovskys，1933～）和他的弟弟格雷戈里·丘德诺夫斯基（Gregory V.Chudnovskys，1938～）的这种估计，可能不是最好的。如果把 14.65 换为$2+\varepsilon$（ε 是大于 0 的任意数）则更合理。几乎所有的超越数都满足这样的不等式。

从 1966 年起，英国数学家贝克（Alan Baker，1939～）得到了比盖尔丰德更一般的结果：如果 α_1，α_2，…，α_n是非

0，1 的代数数；β_0，β_1，β_2，…，β_n 是线性独立的代数无理数，则 $e^{\beta_0}\cdot\alpha_1^{\beta_1}\cdot\alpha_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdot\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数。这个一般结果的一个推论是，证明了 $\pi+\ln a$ 形式的数是超越数，例如 $\pi+\ln2+\sqrt{2}\ln3$ 是超越数。他因这个和其他解析数论的成果荣获 1970 年菲尔兹奖。

由上可见，对无理数和超越数的研究取得了许多成果。

然而，使数学家们头疼的是，贝克的成果虽然具有一定的普遍性，超越数的其他研究也硕果累累，但对许多问题依然是一头雾水——至今没有一个一般的方法来判别某个数是不是超越数。

例如前面提到的 π 和 e“家族”中的 $\pi+e$，$e\pi$，π/e，e^e，π^e的无理性和超越性，至今也不能证明。

又如，至今不知道欧拉常数 $c=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$，$\ln\pi$，$\pi^\pi$是不是无理数或超越数。

再如，有时看似超越数的数却不是超越数，例如 $e^{i\pi}$看似超越数，实际上我们知道 $e^{i\pi}=-1$。

看来，对于无理数和超越数，确实“虽大禹之智，不能测其深浅”——我们知之甚少。

9.3 “亲兄弟”为何分离——黎曼 ζ 函数中为何有 π 无 e

假设 s 是形如 $a+bi$ 的复数，那么形如

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=1+1/2^s+1/3^s+\cdots \tag{9.1}$$

的函数，就叫黎曼函数。它是狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nn^{-z}$（其中

a_n和z都是复数）的特殊情形。

黎曼函数是由德国数学家黎曼于1859年在论文《论小于给定数的素数之个数》中发表的。这篇8页的论文不但开辟了证明素数定理的道路，而且对数学的许多分支都产生过深远的影响。

那么，黎曼为什么要提出（9.1）式呢？

原来，欧拉在1744年一篇著作中发表了他在1737年推出的著名恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\text{（}p\text{ 是素数，}s\text{ 是大于 1 的实数）}\qquad(9.2)$$

显然，（9.2）式的左边就是当s推广到复数范围的（9.1）式。

欧拉曾用（9.2）式证明了所有素数的倒数之和是发散的。由于（9.2）式建立了函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$的性态与素数性质之间的一种关系，因而引起了数学家们的普遍注意。

100多年以后，黎曼敏锐地认识到，如果把（9.2）式中的实数s改成复数s，就有可能更深入地揭示素数分布的奥秘，于是（9.1）式应运而生。

在《论小于给定数的素数的个数》中，黎曼还提出了6个相关的猜想。其中5个已先后被后来的数学家们陆续证明，但至今仍有1个猜想的证明遥遥无期：（9.1）式$\zeta(s)$位于[0, 1]的全部零点，都落在复平面的一条直线$a=1/2$上。不要忘记，这里的a，就是前面提到的“$a+bi$”中的a。这个猜想，后来成为著名的希尔伯特23个问题中的第8个问题。

当然，在黎曼提出（9.1）式之前，对（9.1）式的一些特例已经有了阶段性的成果。

例如，当（9.1）式中的 $s=1$ 的时候，就得到著名的调和级数 $\zeta(1)=1+1/2+1/3+\cdots$。这里的形容词“调和”（harmonic），来自这个级数的“成员”和音阶间隔之间的“和谐关系”。而这个级数的发散性，早在人类认识极限概念之前约 400 年，就被法国数学家、物理学家和经济学家尼古拉·奥雷斯姆（Nicole Oresme，1323～1382）证明了。

奥雷斯姆的证明并不难懂。因为

$$
\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}
$$

而我们知道，后面的 1/2 还有无穷多个，所以 $\zeta(1)$ 是发散的，即 $\zeta(1)\to\infty$。

又如，当（9.1）式中的 $s=2$ 的时候，就得到著名的 $\zeta(2)=1+1/2^2+1/3^2+\cdots$，而它却不是发散而是收敛的。瑞士数学家雅格布·伯努利（1654～1705）在 1698 年的一篇论文中，首先证明了这一结论。所以，这个级数称为伯努利级数。他的这篇论文收集在《猜度术》（ARS Conjectandi）一书中，在他死后 8 年才由他的侄儿尼古拉·伯努利（1695～1726）出版。

那么 $\zeta(2)$ 收敛于哪个值呢？他没能作出回答。1734 年，欧拉算出了 $\zeta(2)\approx1.644\ 934$ 的近似结果，发现了 $\zeta(2)$ 收敛于 $\pi^2/6$ 的优美结果，并在 1748 年的《无穷分析引论》中严格地

证明了 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots=\pi^2/6$。这里1734这个年代，有1736，1737等多种说法。

看这里，π意外地出现在仅仅涉及自然数的级数极限之中，所以这个级数到今天还被看成是数学分析中最漂亮的结果之一。

那么，当 $s=3, 4, 5, 6, \cdots$ 的时候呢？

研究的结果非常有趣。当 $\zeta(s)$ 中的 s 为偶数时，都有简洁的公式 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots=\pi^2/6$，$1+1/2^4+1/3^4+\cdots=\pi^4/90$，…；而且都和π有关，和e无关。但当 s 为奇数时的 $1+1/2^3+1/3^3+\cdots$，$1+1/2^5+1/3^5+\cdots$，却没有类似简洁的结果；而且都和π或e无关。

事实上，在1978年，法国数学家阿佩里（Apéry）就证明了 $\zeta(3)=1+1/2^3+1/3^3+\cdots$ 是一个无理数，它收敛于大约1.202。这个当时轰动数学界的结果表明，$\zeta(3)$ 的确与π和e无关。他的这个成果，由阿尔福雷德·范德波尔滕以“A Proof that Euler Missed... Apéry's Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$”为题，发表在 the Mathematical Intelligencer, 1 (1979), pp.195～203上。

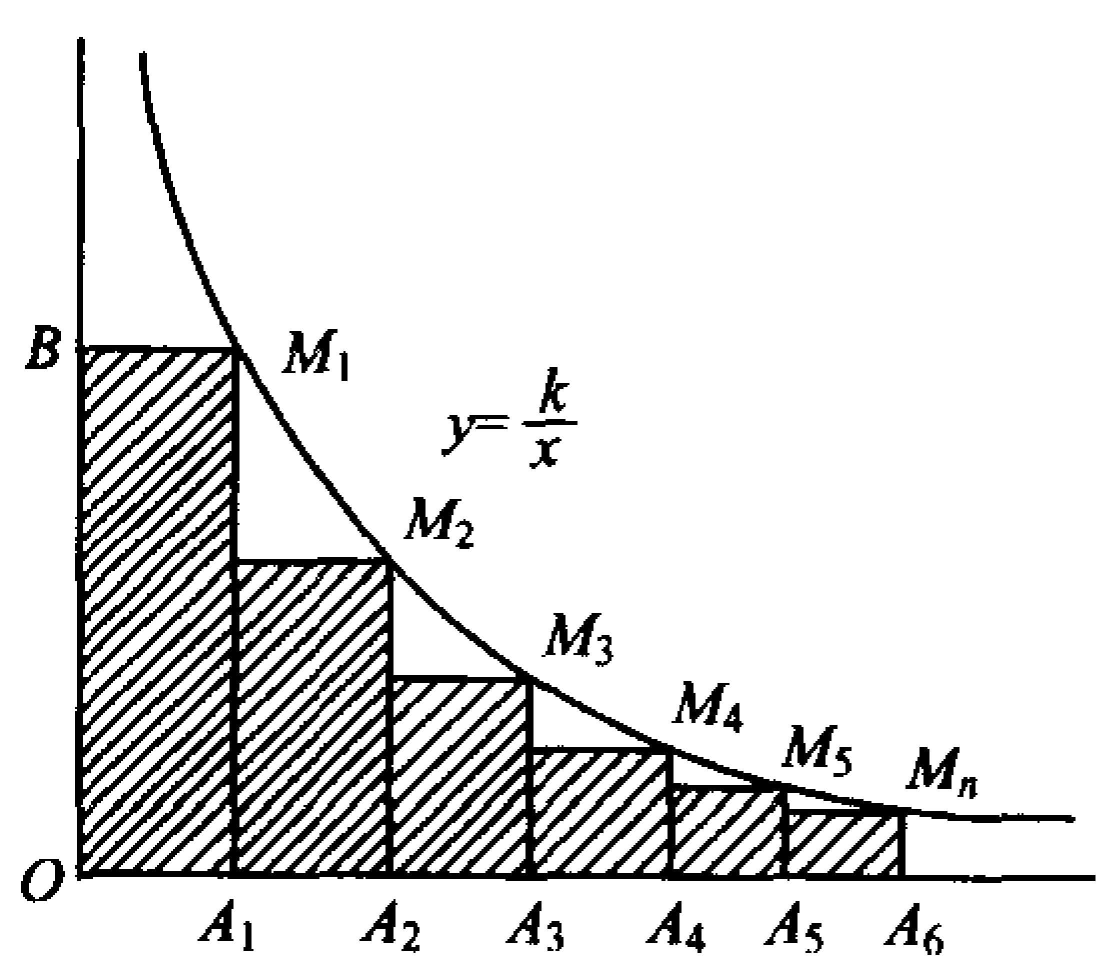


图9-2

还有一个有趣的结果是，只有当 $\zeta(s)$ 中的 $s=1$ 的时候，$\zeta(s)$ 才是发散的；而当 $s>1$ 的时候，$\zeta(s)$ 都是收敛的。利用 $\zeta(1)$ 的发散性，雅格布·伯努利指出了一条双曲线和它的渐近线之间的面积是无穷大（图9-2）。

这是一个谜：为什么 $\zeta(s)$ 中的 s 为偶数的时候，必然与 π 有关；而 s 为任何数的时候，都和 e 无关？

看来，π 和 e 这对“亲兄弟”确实是“分道扬镳”了。

不过，$\zeta(s)$ 并没有和 e “绝缘”。数学家们在寻求

$$\zeta(1/2+\mathrm{i}t)=O(|t|^{\alpha})$$

成立的最小 α 这个重要问题的过程中猜想，如果黎曼猜想成立，则容易推出对任给的 $\varepsilon>0$，就有

$$\zeta(1/2+\mathrm{i}t)=O(|t|^{\varepsilon})$$

这就是著名的林德洛夫猜想——其中有 e。

这里提到的林德洛夫（Ernst Leonard Lindelöf，1880～1946）是一位芬兰数学家。

9.4 神秘的“近似”——e 为何屡屡现身

我们在许多近似计算公式中，都可以看到 e “神秘”地现身。

例如，5.6 中的素数定理，5.11 中的欧拉常数，5.12 中的斯特林逼近公式，5.13 中的分拆公式……

现在我们要问，究竟有哪些还没有发现的近似计算公式中还有 e（有的还有 π），e 在近似计算公式中出现有没有规律，又可不可以预测？

9.5 弟弟为何不像哥哥——e 有厂表达式吗

有人认为，π 这个无理数不是根式表达的数，e 也不是根式表达的无理数。那么，这种说法对吗？



图 9-3　韦达

1579 年，法国数学家韦达（图 9-3）在他的《数学定律，应用于三角形》一书中，得到了 π 的第一个用根式表达的无穷乘积式——韦达式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right)\cdots$$

此外，日本数学家渡边一（1767～1839）死后，日本 1853 年编了《当用算法》一书。书中有一个类似韦达式的式子

当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{\pi}{4}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}\cdot 2^n\text{(根号下 } n+2 \text{ 个 2)}$$

此外，我们在 5.3 中还提到

$$\frac{1}{2}\sqrt{e\pi}=1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ddots}}}}}$$

由上面三个式子可以看出，“π 这个无理数不是根式表达的数”这种说法是不正确的。

那么，“e 也不是根式表达的无理数”这种说法是否正确呢？

由于我们至今没有找到 e 的根式表达式——除了 5.3 中提

到的这个以外，所以无法判断。

现在的问题是，e 有没有根式表达式？如果有，是什么样子，为什么至今没有发现？如果没有，又是为什么？

9.6 寻找“准确”——π 和 e 之间有简洁的实数关系吗

我们在 5.3 中提到了近似“公式” $\pi^4+\pi^5+\approx e^6$，和拉马努金的两个 π 和 e 之间关系的式子，以及本书中提到的其他 π 和 e 之间关系的式子。现在要问：π 和 e 之间，有没有类似 $\pi^4+\pi^5+\approx e^6$ 这种只包含实数的、简洁的关系式？

有的。

$2\ln 2+2\ln 3+\ln\pi\approx 5$（或 $2\ln 6+\ln\pi\approx 5$）就是其中一个。

但是，人们并不止步于此，还想找到不是“近似”而是“准确”表达 π 和 e 之间简洁的实数关系式。

那么，有这样的式子吗？

9.7 “怪”还是“不怪”——对数先于指数

人类追求提高计算速度的努力，从来就没有停止过。特别是十五六世纪文艺复兴时期，航海技术有很大改善，商业规模日趋增大，天文学及测量方面的研究工作也处于繁荣阶段。随之而来的是一门新职业的诞生：一些专门从事计算的人——人们称作“计算师”（又被人称为“计算工匠”）的人开始登场。这些计算师们工作很多，一天忙忙碌碌，可他们没有想如何改善计算方法或计算技术。

可是，科学家们却在与时俱进。

1471 年，德国数学家约翰·穆勒（Johann Müller，1436～1476）出于天文计算的需要，造出了有 8 位数字的正弦表，接着余弦、正切表也相继出现。

我们在 1.4 中提到的约翰·沃纳，就曾尝试用他的那些公式来化乘为加。

17 世纪初，著名天文学家开普勒计算了行星的轨道；伽利略发明了望远镜后，十分热衷星系的研究，这就有必要处理过去一般人很少涉足的大数。

庞大数字的乘、除，乘方、开方等运算十分繁难，不少人把大量宝贵的时间和精力都花在这里面。怎样才能简化计算的手续，把科学家从繁难的运算中解放出来呢？这成为当时一个迫切需要解决的问题。

由于这种客观需要的推动，纳皮尔、比尔吉走在了前面，他们各自独立发明了对数。

奇怪的是，当时欧洲代数学还十分落后，连“指数”、“底数”这些概念都还没有建立，所以，无论是纳皮尔、布里格斯，还是比尔吉，都没有“底”的概念。显然，他们都不是从 $a^x=N$ 这个关系出发来创立对数的。

也就是说，对数的发明与概念的逻辑推演顺序相反。

对数的诞生竟比指数、底数出现还早，显然“不合逻辑”，这不能不说是数学史上的一大奇迹、珍闻和怪事。

怪不得美国数学史家霍华德·伊夫斯在《数学史上的里程碑》中说：“对数的发现早于指数的应用这个事实，是数学史上的反常现象之一。”

也怪不得英国麦尔顿（Lord Moultoin）男爵有感于此，在《纳皮尔 300 年纪念文集》（Napier Tercentenary Volume）序言

的第 3 页中说："对数的发明就像是一个晴天霹雳来到世界上。前人的任何工作都没能导致这项发明，没有任何东西预见到它或预示它的到达。这项发明是孤立的，它没有借助其他智力工作，也没有遵循原有的数学思想路线，就突然闯到人类思想中来了。"

到了 18 世纪，欧拉才用乘方的逆运算来定义对数，并指出"对数源于指数"。这个见解，很快被人们接受。现在，大都按"先指数"，"后对数"的顺序学习。

为什么有"对数比指数、底数还早"的"奇迹"和"怪事"?

"男儿何不带吴钩，收取关山五十州。"数学史上许多"奇迹"和"怪事"，等待着读者你来揭秘。

◎第十章

附录——e的数表供你查询

我祈祷，

我知道，

自然永远不会背叛

那热爱她的心……

——威廉·华兹华斯

e=2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757
247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547
594 571 382 178 525 166 427 427 466 391 932 003 059
921 817 413 596 629 043 572 900 334 295 260 595 630
738 132 328 627 943 490 763 233 829 880 753 195 251
019 011 573 834 187 930 702 154 089 149 934 884 167
509 244 761 460 668 082 264 800 168 477 411 853 742
345 442 437 107 539 077 744 992 069 551 702 761 838
606 261 331 384 583 000 752 044 933 826 560 297 606
737 113 200 709 328 709 127 443 747 047 230 696 977
209 310 141 692 836 819 025 515 108 657 463 772 111
252 389 784 425 056 953 696 770 785 449 969 967 946
864 454 905 987 931 636 889 230 098 793 127 736 178

215 424 999 229 576 351 482 208 269 895 193 668 033
182 528 869 398 496 465 105 820 939 239 829 488 793
320 362 509 443 117 301 238 197 068 416 140 397 019
837 679 320 683 282 376 464 804 295 311 802 328 782
509 819 455 815 301 756 717 361 332 069 811 250 996
181 881 593 041 690 351 598 888 519 345 807 273 866
738 589 422 879 228 499 892 086 805 825 749 279 610
484 198 444 363 463 244 968 487 560 233 624 827 041
978 623 209 002 160 990 235 304 369 941 849 146 314
093 431 738 143 640 546 253 152 096 183 690 888 707
016 768 396 424 378 140 592 714 563 549 061 303 107
208 510 383 750 510 115 747 704 171 898 610 687 396
965 521 267 154 688 957 035 035 4

$\frac{1}{e}$=0.367 879 441 171 442

e^2=7.389 056 098 930 650

$\sqrt{e}$=1.648 721 270 700 128

e^c=1.781 072 417 990 197 985 22（c 是欧拉常数）

e（八进位表示）=2.557 605 213 050 535 5

ln10=2.302 585 092 994 046

lge=0.434 294 481 903 252

参考文献

别莱利曼．1980．趣味代数学．第3版．丁寿田等译．北京：中国青年出版社

别莱利曼．1979．趣味物理学续编．第2版．滕砥平译．北京：中国青年出版社

陈仁政．1997．结绳的奥妙．科学世界，(12)：24

陈仁政．1992．漫谈对数．数学通报，(4)：46

陈仁政．1990．漫谈两个著名超越数．数学通报，(1)：44

陈仁政．2005．说不尽的π．北京：科学出版社

陈仁政．1991．说不尽的π．中小学数学，(4)：14和（5)：15连载

陈仁政．1991．一种力“放大器”的分析．物理通报，(2)：28

陈仁政．2002，2004．站在巨人肩上·科学趣味故事．第1版和第2版．北京：北京出版社

陈仁政．1989．“组数”问题漫谈．中小学数学，(11)：32

单墫．1987．趣味数论．北京：中国青年出版社

邓宗琦．1990．数学家辞典．武汉：湖北教育出版社

杜瑞之等．1991．简明数学史辞典．济南：山东教育出版社

樊恒铎．1965．计算尺的原理与用法．第2版．上海：上海科学技术出版社

樊映川等．1964．高等数学讲义．第2版．北京：高等教育出版社

G．盖莫夫．1978．从一到无穷大．暴永宁译．北京：科学出版社

顾建中．1981．热学教程．第2版．北京：人民教育出版社

郭奕玲等．1993．物理学史．北京：清华大学出版社

华东师范大学数学系．1991．数学分析·上．第2版．北京：高等教育出

版社
H. 德里. 1982. 100 个著名初等数学问题——历史和解. 上海：上海科学技术出版社
H. 伊夫斯. 1990. 数学史上的里程碑. 欧阳绛等译. 北京：科学技术出版社
计惠康等. 1980. 怎样证明数列 $\{(1+1/n)^n\}$ 递增且有上界. 数学通报，(4)：22
简明不列颠百科全书编译组. 1985. 简明不列颠百科全书·8. 北京：中国大百科全书出版社
解恩泽等. 1987. 简明自然科学史手册. 济南：山东教育出版社
康拉德等. 1987. 科学发现与发明辞典. 周忠德等译. 上海：知识出版社
堀场芳等. 1997. e 的奥秘——从 e 的发现到电脑程序. 丁树深译. 北京：科学出版社
李铭心等. 1991. 中学数学中的数学史. 海口：南海出版公司
李文汉. 1981. 科学的发现 (3) ——六大数学难题的故事. 北京：中国少年儿童出版社
梁灿彬等. 1980. 电磁学. 北京：人民教育出版社
梁宗巨. 1992. 数学历史典故. 沈阳：辽宁教育出版社
梅向明. 1980. 对数表的造法和数 e. 数学通报，(1)：21
宁挺. 1985. 说 e. 福州：福建教育出版社
钱宝琮等. 1964. 中国数学史. 北京：科学出版社
日本数学会. 1984. 数学百科辞典. 科学出版社组织国内学者编译. 北京：科学出版社
塞路蒙·波克纳. 1992. 数学在科学起源中的作用. 李家良译. 长沙：湖南教育出版社
史密斯等. 1930. 数论尺规作图及周率. 郑太朴译. 上海：商务印书馆
斯科特. 2002. 数学史. 侯德润等译. 桂林：广西师范大学出版社

宋学义．1980．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ 的一个推广．数学通报，(12)：28

王勤国．1980．三次原根 ω 的应用．数学通报，(12)：30

王勤国．1982．数 e 存在性的又一证明．数学通报，(4)：24

王树禾．2004．数学聊斋．北京：科学出版社

王树禾．2004．数学演义．北京：科学出版社

吴鹤龄．2004．幻方及其他．北京：科学出版社

吴文俊．1995．世界著名数学家传记．北京：科学出版社

吴振奎．2001．Eule 常数 0．577 215 6…．中等数学，(1)：25

吴振奎等．2003．数学的创造．上海：上海教育出版社

吴振奎．2000．数 e．中等数学，(6)：20

物理学大辞典编辑组．1980．物理学大辞典．香港：中外出版社

夏道行．1964．π 和 e．上海：上海教育出版社

姚启钧原著，华东师大《光学》教材编写组改编．1981．光学教程．北京：人民教育出版社

尹斌庸等．1985．古今数学趣话．成都：四川科学技术出版社

郁祖权．2004．中国古算解题．北京：科学出版社

约翰·巴罗．2000．不论——科学的极限与极限的科学．李新洲等译．上海：上海科学技术出版社

曾晓新．1990．数学的魅力．重庆：科学技术文献出版社重庆分社

张景中．2004．从$\sqrt{2}$谈起．北京：中国少年儿童出版社

浙江大学普通化学教研组．1978．普通化学．北京：人民教育出版社

浙江大学普通化学教研组．1981．普通化学．第 2 版．北京：人民教育出版社

中国大百科全书编委会．1988．中国大百科全书·数学．北京：中国大百科全书出版社

中国科学院自然科学史研究所近现代科学史研究室．1985．20 世纪科学技术简史．北京：科学出版社

中国科学院自然科学史研究所．1983．钱宝琮科学史论文选集．北京：

科学出版社

中学数学教师手册编写组．1985．中学数学教师手册．上海：上海教育出版社

祝梁济．1982．自然对数漫谈．数学通报，(2)：19

自然科学大事年表编写组．1975．自然科学大事年表．上海：上海人民出版社

后　记

科学出版社李敏女士把我这条黄牛当马使，于2004年6月21日10时多来电话，要我写一本关于e的书。限于水平和资料，我一时觉得难以下手。但是，在她和张景中、王树禾等学者的鞭策、鼓励或帮助下，终于鼓足勇气“上了梁山”，于是有了这弄斧之作。

在本书编写过程中，以下学者给我提供了资料。李敏在2004年6月23日寄出的《e的奥秘——从e的发现到电脑程序》，和随后寄出的《世界著名数学家传记》，以及用电子邮件发来的前一书的电脑稿文字部分。华东师范大学张奠宙先生在1998年3月17日寄出的、借给我的《π和e》。四川理工学院黄蕴魁先生长期借给我的几本书。特别是安徽阜阳师范学院宁挺先生，在2005年1月16日寄赠出的他的大作《说e》(和《π的今昔》）所提供的资料，为拙作增色不少；他还在我给他拜年的2005年2月7日夜，无私地同意我引用《说e》中的内容，并希望我们这些“后浪”超过“前浪”，其诚恳和无私，使人肃然起敬，等等。这类真诚、无私、有效的帮助，拙笔难以卒述，谨在此对他们和其他提供帮助的学者，表示最真诚的、永远

的感谢。

我还感谢参加编写此书的以下学者：(排名不分先后) 陈梅、涂海、李开贵、曾品中、陈立、陈仕达、陈雪、陈楠、梁聪、谢久明、潘宁、黎渝、罗锋、郭汉卿、张云杰、黄新、徐仲先、徐元培。

本书参考、引用了书末所列的主要参考文献，以及限于篇幅未能列出的其他文献或其他各种媒体的内容。在此，对上述全部媒体的作者和出版者表示衷心的感谢，并对未列出媒体名称的作者和出版者表示深深的歉意。

由于作者水平及资料的限制，书中不妥、谬误之处，切盼读者指正。

陈仁政

2005 年 2 月 15 日于四川自贡